

УДК 669.213:66.094.6

## **ПРОСАЧИВАНИЕ ЦИАНИДНОГО РАСТВОРА ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ РУДУ. II. ОДНОРОДНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ**

**А.Е. Воробьев, В.С. Портнов, А.К. Турсунбаева,  
В.М. Юров, А.Д. Маусымбаева**

*Карагандинский государственный технический университет, г. Караганда,  
Казахстан [atursunbaeva75@mail.ru](mailto:atursunbaeva75@mail.ru)*

Рассмотрена модель потока раствора с однородными граничными условиями для выявления основных закономерностей движения раствора в капилляре. Получены уравнения, которые позволяют оценить критическую скорость потока раствора через характеристики капилляра и раствора. Установлены основные закономерности просачивания цианидного раствора сквозь пористую руду.

**Ключевые слова:** капилляр, просачивание.

## **INFILTRATION THE CYANIC A SOLUTION THROUGH POROUS ORE. II. HOMOGENEOUS BOUNDARY CONDITIONS**

**A.E. Vorobiev, V.S. Portnov, A.K. Tursunbaeva,  
A.D. Mausunbaeva, V.M. Jurov**

*Karaganda state technical university, Karaganda, Kazakhstan  
[atursunbaeva75@mail.ru](mailto:atursunbaeva75@mail.ru)*

A model of the flow solution with homogeneous boundary conditions for revealing the basic laws of motion of the solution in the capillary is considered. The equations that allow us to estimate the critical flow rate of solution through the capillary and the characteristics of the solution are received. The main regularities infiltration cyanide solutions through a porous ore are established.

**Keywords:** capillary, infiltration.

В первой части работы получены общее решение задачи о цианидном потоке в цилиндрическом капилляре с подвижной границей раздела фаз. Вследствие зависимости размера области переноса потока от времени к этому типу задач неприменимы классические методы разделения переменных и интегральных преобразований Фурье [1]. Для бесконечной и полубесконечной об-

ласти с границей, движущейся по произвольному закону, решение задачи приведено в работе [2].

Для того чтобы выяснить основные закономерности движения раствора в капилляре, рассмотрим модель потока раствора с однородными граничными условиями. В этом случае краевая задача будет выглядеть так:

$$\frac{\partial \rho(r, z, t)}{\partial t} = a^2 \left[ \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) \right], \quad (1)$$

при  $\rho(r, z, t)|_{t=0} = 1, \rho(r, z, t)|_{r=R} = 1,$

$$\rho(r, z, t)|_{z=0} = 1, \rho(r, z, t)|_{z=\beta(t)} = 1. \quad (2)$$

Решение задачи (1)-(2), приведенное в I части работы имеет вид:

$$\rho(r, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} J_0(\lambda_{0k} r) \left\{ e^{-a^2 t} \left[ \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^e e^{-\frac{(z-\xi)^2}{4a^2\tau}} \cdot \left( \int_0^e J_0(\lambda_{0k} r) r dr \right) d\xi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{RJ_0(\lambda_{0k} R)}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^e \frac{e^{-a^2 t}}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(z-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{z}{(a^2(t-\tau))^{3/2}} e^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}} K_1(\tau) d\tau + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{z-\beta(\tau)}{(a^2(t-\tau))^{3/2}} e^{-\frac{(z-\beta(\tau))^2}{4a^2(t-\tau)}} K_2(\tau) d\tau \right] \right\}. \quad (3)$$

Ограничиваясь первым членом ряда интеграл равен [4]:

$$\int_0^l J_0(\lambda_{0k} r) r dr = r J_1(\lambda_{0k} r)|_0^l = e J_1(\lambda_0 e). \quad (4)$$

Нам нужно вычислить интегралы:

$$I_1 = \frac{e J_1(\lambda_0 e)}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^e e^{-\frac{(z-\xi)^2}{4a^2\tau}} d\xi, \quad (5)$$

$$I_2 = \frac{RJ_1(\lambda_0 R)}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^e \frac{e^{-a^2 t}}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(z-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi, \quad (6)$$

$$I_3 = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{z}{(a^2(t-\tau))^{3/2}} e^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}} K_1(\tau) d\tau, \quad (7)$$

$$I_4 = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{z-\beta(\tau)}{(a^2(t-\tau))^{3/2}} e^{-\frac{(z-\beta(\tau))^2}{4a^2(t-\tau)}} K_2(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Чтобы вычислить  $I_1$ , сделаем замену переменных:

$$y = \frac{z-\xi}{\sqrt{4a^2\tau}}; \quad \xi = 0, \quad y_1 = \frac{z}{\sqrt{4a^2\tau}};$$

$$\xi = b, \quad y_2 = \frac{z-1}{\sqrt{4a^2\tau}}.$$

$$I_1' = \int_0^t e^{-\frac{(z-\xi)^2}{4a^2\tau}} d\xi = -\frac{1}{2a\sqrt{\tau}} \left[ \int_0^{y_1} e^{-y^2} dy - \int_0^{y_2} e^{-y^2} dy \right].$$

Интегралы в скобках представляют собой известные функции ошибок [5]:

$$erfx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy. \quad (9)$$

Разлагая (12) в ряд получим:

$$I_1 = \frac{e^2 J_0(\lambda_0 e)}{16a^3} \ln t. \quad (10)$$

Интеграл  $I_2$  вычислим подобно  $I_1$ :

$$I_2 = \frac{RJ_1(\lambda_0 R)}{16a^3} \cdot e^{-a^2 t} \ln(t-1). \quad (11)$$

При вычислении интеграла  $I_3$  используем замену (см. часть I работы):

$$K_1 = 2a^2 + \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\beta(t)}{(a^2(t-\tau))^{3/2}} e^{-\frac{\beta^2(t)}{4a^2(t-\tau)}} f(t) d\tau, \quad (12)$$

$$f(t) = 2a^2 q(t), \quad (13)$$

$$q(t) = 1 - \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\beta(t)}{(a^2(t-\tau))^{3/2}} e^{-\frac{\beta^2(t)}{4a^2(t-\tau)}} d\tau. \quad (14)$$

Делая замену переменных  $\frac{1}{\sqrt{t-\tau}} = x$  получим интегралы вида [5]:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-x^2} dx = \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x. \quad (15)$$

Тогда получим:

$$q(t) = 1 - \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \left[ \frac{4}{\beta(t)} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \right) \right], \quad (16)$$

Подставляя (16) в (13) и далее в (12) и разлагая (15) в ряд, получим:

$$K_1(\tau) = 2a^2 + \frac{4a}{\beta(t)\sqrt{\pi}} \cdot \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \right) \quad (17)$$

Подставляя (17) в (7), производя аналогичные замены переменных и разложение в ряд, получим:

$$I_3 = \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \cdot \left( \frac{a^2}{z\pi} + \frac{a^3}{\pi^2 z \beta(t)} \right),$$

$$I_4 = \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \cdot \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(z - \beta(t))} \quad (18)$$

Подставляем  $I_1, I_2, I_3$  и  $I_4$  в (6), учитывая, что из уравнения  $I_0(\lambda_{0k} r) = 0$  следует

$$\lambda_0 = \frac{2r}{R} \text{ получим:}$$

$$\rho(r, z, t) = J_0\left(\frac{2r}{R}\right) e^{-a^2 t} \left\{ \frac{e^2 J_0\left(\frac{2re}{R}\right)}{16a^3} \ln t + \right.$$

$$+ \frac{R J_1\left(\frac{2r}{R}\right)}{16a^3} e^{-a^2 t} \ln(t-1) +$$

$$+ \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \left( \frac{a^2}{z\pi} + \frac{a^3}{\pi^2 z \beta(t)} \right) +$$

$$\left. + \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{[z - \beta(t)]} \right\}, \quad (19)$$

При больших  $t$  и значения  $1/\sqrt{t} \rightarrow 0$ ,

$\ln(t-1) \cdot e^{-a^2 t} \rightarrow 0$ , получим:

$$\rho(r, z, t) = \frac{a^3}{\pi^2} J_0\left(\frac{2r}{R}\right) \cdot \frac{t}{z\beta(t)}, \quad (20)$$

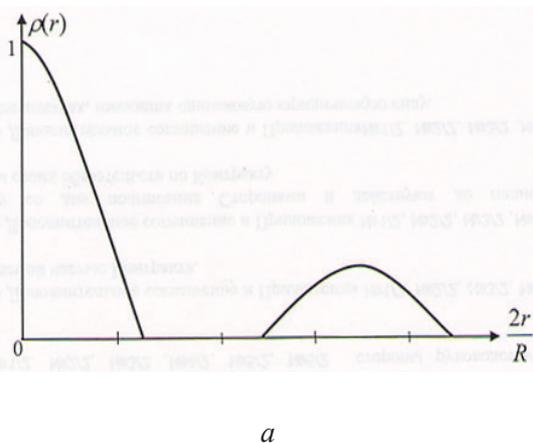
Учитывая  $z = V_{cp} t$ , где  $V_{cp}$  — средняя скорость движения раствора, из (20) следует:

$$\rho(r, t) = \frac{a^3}{\pi^2 \cdot V_{cp}} \cdot J_0\left(\frac{2r}{R}\right) \cdot \frac{1}{\beta(t)}, \quad (21)$$

Первый член в выражении (21) описывает влияние геометрии капилляра и движения раствора на плотность транспортного потока, возникновение «пробок» в потоке раствора, что видно из графика функции  $\rho(r) = J_0\left(\frac{2r}{R}\right)$  при  $r > 0$  (рисунок).

Движение границы  $\beta(t)$  чаще всего получается автомодельным, т.е.  $\beta(t) = \beta_0 \sqrt{t}$  [6], что следует из уравнения баланса на границе раздела фаз. В этом случае уравнение (21) принимает вид (рисунок):

$$\rho(r, t) = \text{const} \cdot J_0\left(\frac{2r}{R}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}. \quad (22)$$



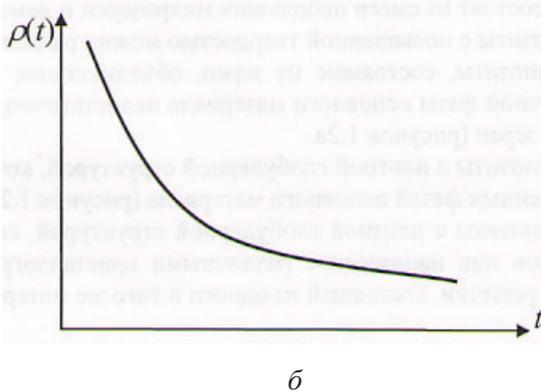


Рисунок — Графики изменения плотности потока раствора от геометрии капилляра (а) и от времени (б)

Из рисунка видно, что поток раствора, находящийся в свободном режиме, распадается и переходит в смешанный — свободнозаторможенный (а) и гиперболически убывает с течением времени (б). Распад и убывание потока раствора, приводит к хаотическому (конвективному) движению раствора даже для однородных граничных условий. Для стационарного потока в идеальном случае ( $J_0(0) = 1$ ,  $\beta(t) = z_i(t) - z_{i+1}(t)$ ) из (21) следует:

$$\rho(t) = \text{const} \cdot \frac{1}{z_i(t) - z_{i+1}(t)}. \quad (23)$$

Уравнение (23) получено Гринбергом [7] в рамках гидродинамической модели и является частным случаем нашего решения.

Обозначая через  $v(z, t)$  скорость раствора в точке  $z$  в момент  $t$  и полагая, что она зависит только от плотности  $\rho$ , имеем, что когда капилляр пуст ( $\rho = 0$ ), раствор движется с максимальной скоростью  $V = V_{\max}$ .

При наполнении капилляра скорость падает до полной остановки ( $v = 0$ ), когда  $\rho = \rho_{\max}$ . Эта модель Гриншилдса выражается соотношением:

$$v(\rho) = v_{\max} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right), \quad 0 \leq \rho \leq \rho_{\max} \quad (24)$$

Уравнение (24) симметрично, т.е. нетрудно видеть, что:

$$\rho = \rho_{\max} \left( 1 - \frac{v}{v_{\max}} \right), \quad 0 \leq v \leq v_{\max}. \quad (25)$$

Из (25) следует, что скорость потока раствора изменяется от 0 до  $V_{\max}$ , когда  $v = v_{\max}$ ,  $\rho = \rho_{\max}$ .

Используя полученное с использованием метода аналогий для «критического» радиуса  $r_k$  капилляра, начиная с которого плотность потока раствора зависит от его радиуса, получим:

$$r_k = \frac{2\alpha V}{RT}, \quad (26)$$

где  $\alpha$  — межфазное натяжение,  $V$  — молярный объем,  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $T$  — температура.

Уравнение (26) позволяет оценить критическую скорость потока раствора через характеристики капилляра и раствора ( $RT$  пропорциональна кинетической энергии потока раствора).

Рассмотрим самоорганизацию жидкостного потока в пористой среде на основе синергетических эффектов, связанные с нелинейностью предложенной модели. В [10] предложена оценка уровня организованности системы на основе критерия Ферстера,

представляющего собой меру избыточности по К.Шеннону:

$$R = \frac{S_{\max} - S_t}{S_{\max}} = 1 - \frac{S_t}{S_{\max}}, \quad (27)$$

где  $S_{\max}$  — максимальное значение энтропии системы;  $S_t$  — текущее значение величины энтропии в каждый данный момент времени  $t$ .

Сущность любой системы — наличие обменных процессов между ее частями и элементами, то есть наличие связей, которых пропорционально квадрату числа элементов системы [11] (число выделенных элементарных объемов жидкости или число капилляров в пористой руде):

$$S = \vartheta n^2, \quad (28)$$

где  $n$  — количество элементов,  $S$  — число связей между ними,  $\vartheta$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от структуры системы. Если элементы системы связаны по типу «каждый с каждым и с самим собой», то  $\vartheta = 1$ . При другом типе связей величина коэффициента будет иной. Таким образом, развитие любой системы определяется двумя параметрами: числом элементов системы  $n$ , которое может меняться от 0 до максимально возможной для данной системы величины, и коэффициентом  $\vartheta$ .

Если считать что каждая связь может находиться в двух равновероятных состояниях (например, есть она или нет), то общее количество состояний системы (ее разнообразие) будет равно:

$$R = 2^S = 2^{\vartheta n^2}. \quad (29)$$

Из [3, 4] энтропия системы равна:

$S = k \ln(2^{\vartheta n^2}) = \vartheta n^2 \cdot k \ln 2$ , где  $k$  — постоянная Больцмана. Произведение  $k \ln 2$  есть энергетический эквивалент одной единицы информации.

Количество структурной информации, которое содержит данная система при данных посылках  $a$ , следовательно, внутренняя энергия системы пропорциональна квадрату числа элементов и при  $\vartheta = 1$  составляет одну единицу на одну связь (считая каждый элемент особой связью «с самим собой»). Соответственно, энергия связей составляет величину:

$$S_s = \vartheta n(n-1) \cdot k \ln 2. \quad (30)$$

Это есть потенциальная энергия связей системы, которая определяет ее структурную устойчивость. Она определяется не простым количеством связей между элементами, а оптимальным числом связей и их конфигурацией.. Система устойчива при условии минимума потенциальной энергии.

Энергия внешних источников, которая в форме работы поступает в систему и приводит к преобразованию или созданию ее структуры равна:

$$A = T \vartheta n^2 \cdot k \ln 2 = \Theta \vartheta n^2 \ln 2, \quad (31)$$

где  $T$  — температура,  $\Theta = kT$  — статистическая температура.

Знак равенства соответствует равновесному протеканию процесса. Но в реальных системах процессы отличаются от равновесных, имеем строгое неравенство. Выражение (31) показывает наличие квадратичной зависимости энергетических затрат

на перестройку структуры системы от числа составляющих ее элементов. Из этого следует: ни одна система не может усложняться до бесконечности, поскольку это потребовало бы внешних источников энергии бесконечно большой мощности. Следовательно, любая система может удерживать лишь ограниченное число элементов, свободной энергии и информации. Сопоставляя формулы (24) и (37) нетрудно получить следующие уравнения:

$$R = \frac{R_{\max}}{\rho_{\max}} \cdot \text{const} \cdot J_0 \left( \frac{2r}{L} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad R = 1 - \frac{2\alpha}{v_{\phi}}. \quad (32)$$

Как и следовало ожидать, уровень организации потока раствора в пористой руде больше тогда, когда больше протяженность капилляра ( $r$ ), больше его радиус ( $R$ ) или число капилляров на единицу площади ( $n$ ) и больше средняя скорость движения ( $v_{\phi}$ ). Уровень организации увеличивается и при замедлении движения потока (как  $1/\sqrt{t}$ ), но такой путь приводит к снижению эффективного выщелачивания металла.

Для расчета оптимального количества числа капилляров на единицу площади одной системы орошения получим формулу:

$$n = \frac{1}{k h 2} \sqrt{h \left( 1 - \frac{2\alpha}{v_{\phi}} \right)}. \quad (33)$$

Число капилляров на единицу площади руды не может быть сколь угодно большим и пропорционально ее пористости, которая, в свою очередь, определяется принципами плотнейшей упаковки частиц руды.

Из приведенных выше уравнений следует следующий факт — энергетические за-

траты, а, следовательно, стоимость работ по созданию системы орошения руды пропорциональна квадрату числа элементов этой системы при ограничениях (33).

На примере задачи с однородными граничными условиями установлены основные закономерности просачивания цианидного раствора сквозь пористую руду. В дальнейшем рассмотрим изменение концентрации цианидного раствора в жидкой фазе за счет его движения с некоторой средней скоростью, радиального перемешивания, молекулярной диффузии и собственно процесса растворения твердых частиц золота с учетом фрактальной структуры и перколяции в пористой руде.

#### Список литературы

1. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. — М.: Высш. шк., 1985. 480с.
2. Гринберг Г. А. О решении обобщенной задачи Стефана о промерзании жидкости, а также родственных задач теплопроводности, диффузии и других // ИСТФ, 1967, т.37, №9. С. 1598-1606.
3. Карташов Э. М. Термокинетика процессов хрупкого разрушения полимеров в механических, диффузионных и температурных полях. Автореф. дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук. — Л.: ИВС АН СССР, 1982. 54с.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1975, 735с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1977, 832с.
6. Любов Б. М. Теория кристаллизации в больших объемах. — М.: Наука, 1975. 256с.

7. Greenberg H. An analysis of traffic flow // *Operations Research*, 1959, vol.7. P.79–85.
8. Юров В.М., Ещанов А.Н., Портнов В.С. и др. Математические модели электропроводности твердых тел // *Материалы III межд. конф. «Математическое моделирование и информационные технологии в образовании и науке»*, Алматы, 2005, т.1., С. 234–237.
9. Юров В.М., Портнов В.С. и др. Размерные эффекты в физике малых частиц и поверхности. // *Вестник КарГУ, сер. Физика*, 2006, № 3 (43). С.11–18.
10. Александров Е.А., Боголепов В.П. О некоторых организационных критериях качества функционирования систем (к вопросу о создании математического аппарата теории организации) // *Организация и управление*. — М.: Наука, 1968. С.60–76.
11. Глушков В.М. Введение в АСУ. — Киев: Техніка, 1974, 264 с.
-