Физико-математические науки

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШЕСТОГО ПОРЯДКА С СУММИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

Митрохин С.И.

НИВЦ МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

§1. Постановка задачи.

Будем рассматривать дифференциальное уравнение шестого порядка следующего вида:

$$Y^{(6)}(X) + \mathrm{N}(X)\cdot Y^{(3)}(X) + R(X)\cdot Y''(X) + p(x)\times$$

$$\times\, y'(x) + q(x)y(x) = \lambda a^6 y(4),\ 0 \le x \le \pi,\ a>0 \quad (1)$$

где коэффициенты $\nu(x)$, $r(x)$, $p(x)$ и $q(x)$ в дифференциальном уравнении (1) являются суммируемыми функциями, то есть удовлетворяют условиям теоремы Римана-Лебега:

$$\left(\int_0^x q(t)dt\right)'_x = q(x) \text{ почти всюду } \forall x \in [0;\pi]$$

$$\left(\int_0^x p(t)dt\right)'_x = p(x) \text{ почти всюду и т. д.}$$

В диффер. уравнении (1) число λ является спектральным параметром.

Цель статьи — найти асимптотику решений дифференциального уравнения (1) при больших значениях спектрального параметра λ.

§2.Асимптотика решений дифференциального уравнения (1).

Пусть $\lambda = s^6$, $s = \sqrt[6]{\lambda}$ — некоторая фиксированная ветвь корня (мы её выберем условием $\sqrt[6]{1} = +1$). Пусть ω_k, (k = 1, 2, …,6) — различные корни шестой степени из единицы: $\omega_k^6 = 1$, $\omega_k = e^{\frac{2\pi i}{6}\cdot(k-1)}$ (k = 1, 2, …,6). Про числа ω_k известны следующие свойства:

$$\sum_{k=1}^{6}\omega_k^m = 0,\ (k = 1, 2, \ldots, 6),\ m = 1, 2, 3, 4, 5. \qquad (2)$$

Методами работ [1] и [2] доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Решение дифференциального уравнения (1) является решением следующего интегрального уравнения Вольтерра:

$$y(x,s) = \sum_{k=1}^{6} C_k\cdot e^{a\omega_k sx} - \frac{1}{6a^5s^5}\cdot\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{\omega_k^5}\cdot e^{a\omega_k sx}\cdot\int_0^x m(t)e^{-a\omega_k st}\cdot dt,\ \ \frac{1}{\omega_k^5} = \omega_k, \qquad (3)$$

при этом в силу свойства (2) имеем:

$$\frac{y^{(m)}(x,s)}{a^m s^m} = \sum_{k=1}^{6} C_k\cdot\omega_k^m\cdot e^{a\omega_k sx} - \frac{1}{6a^5s^5}\cdot\sum_{k=1}^{6}\frac{\omega_k^m}{\omega_k^5}\cdot e^{a\omega_k sx}\cdot\int_0^x m(t)e^{-a\omega_k st}\cdot dt,\ \ \mathrm{m} = 1, 2, 3, 4, 5. \qquad (4)$$

где $m(x) + \nu(x)\cdot y^{(3)}(x) + r(x)\cdot y''(x) + p(x)\cdot y'(x) + q(x)\cdot y(x)$, C_k (k = 1, 2, …, 6) — произвольные постоянные.

Доказательство теоремы 1 заключается в подстановке формулы (4) (при m = 5) и (3) в уравнение (1) с использованием свойства (2).

Далее применим метод последовательных итераций Пикара. Находим $y(t, s)$ из (3) и $y(m)(t, s)$, (m = 1, 2, 3) из (4) и снова подставим в интегральное уравнение (3). Затем произведём необходимые оценки, аналогичные оценкам монографий [2] и [3]. При этом приходим к выводу, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Общее решение дифференциального уравнения (1) имеет следующий вид:

$$y(x,s) = \sum_{k=1}^{6} C_k\cdot y_k(x,s),\quad y^{(m)}(x,s) = \sum_{k=1}^{6} C_k\cdot y_k^{(m)}(x,s),\ \mathrm{m} = 1, 2, 3, 4, 5. \qquad (5)$$

где C_k — произвольные постоянные, причём фундаментальная система решений $\{y_k(x,s)\}_{k=1}^{6}$ допускает следующие асимптотические оценки при $|s|\to+\infty$:

$$y_k(x,s)=e^{a\omega_k sx}+\frac{y_{k2}(x,s)}{s^2}+\frac{y_{k3}(x,s)}{s^3}+\frac{y_{k4}(x,s)}{s^4}+\frac{y_{k5}(x,s)}{s^5}+\frac{y_{k6}(x,s)}{s^6}+O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\, s|x}}{s^7}\right), \quad (6)$$

$$\frac{y_k^{(m)}(x,s)}{(as)^m}=\omega^m\cdot e^{a\omega_k sx}+\frac{y_{k2}^{(m)}(x,s)}{s^2}+\frac{y_{k3}^{(m)}(x,s)}{s^3}+\frac{y_{k4}^{(m)}(x,s)}{s^4}+\frac{y_{k5}^{(m)}(x,s)}{s^5}+O\left(\frac{e^{\mathrm{Im}(|s|x)}}{s^6}\right), \quad (7)$$

$m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. При этом мы имеем:

$$y_{k4}(x, s) = y_{k41}(x,s) + y_{k42}(x, s),\ y_{k5}(x, s) = y_{k51}(x, s) + y_{k52}(x, s) + y_{k53}(x, s), \quad (8)$$

$$y_{k6}(x, s) = y_{k61}(x, s) + y_{k62}(x, s) + y_{k63}(x, s) + y_{k64}(x, s), \quad (9)$$

$$y_{k51}(x,s)=-\frac{1}{6a^5s^5}\cdot\sum_{n=1}^{6}\omega_n\cdot e^{a\omega_n sx}\cdot\int_0^x q(t)e^{a(\omega_k-\omega_n)st}\cdot dt_{qkn},\ k=1,2,3,4,5,6 \quad (10)$$

$$y_{k41}(x,s)=-\frac{\omega_k}{6a^4s^4}\cdot\sum_{n=1}^{6}\omega_n\cdot e^{a\omega_n sx}\cdot\int_0^x p(t)e^{a(\omega_k-\omega_n)st}\cdot dt_{pkn},\ k=1,2,3,4,5,6 \quad (11)$$

$$y_{k61}(x,s)=\frac{\omega_k^3}{36a^6s^6}\cdot\sum_{j=1}^{6}\left\{\omega_j^2\cdot\left[\sum_{n=1}^{6}\omega_n\cdot e^{a\omega_n sx}\cdot\int_0^x p(t)\cdot e^{a\cdot(\omega_j-\omega_n)st}\cdot v_{kj}(t)\cdot dt_{pjnvkj}\right]\right\}, \quad (12)$$

причём в формуле (10) (и дальше) введено следующее обозначение:

$$v_{kj}(t,s)=\int_0^t v(\xi)\cdot e^{a\cdot(\omega_k-\omega_j)s\xi}\cdot d\xi_{vkj},\ r_{kj}(t,s)=\int_0^t r(\xi)\cdot e^{a\cdot(\omega_k-\omega_j)s\xi}\cdot d\xi_{rkj}, \quad (13)$$

$$y_{k3}(x,s)=-\frac{\omega_k^2}{6a^4s^4}\cdot\sum_{n=1}^{6}\omega_n\cdot e^{a\omega_n sx}\cdot\int_0^x r(t)e^{a(\omega_k-\omega_n)st}\cdot dt_{rkn},\ k=1,2,3,4,5,6, \quad (14)$$

$$y_{k52}(x,s)=\frac{\omega_k^3}{36a^5s^5}\cdot\sum_{j=1}^{6}\left\{\omega_j^3\cdot\left[\sum_{n=1}^{6}\omega_n\cdot e^{a\omega_n sx}\cdot\int_0^x r(t)\cdot e^{a\cdot(\omega_j-\omega_n)st}\cdot v_{kj}(t)\cdot dt_{rjnvkj}\right]\right\}, \quad (15)$$

$$y_{k62}(x,s)=\frac{\omega_k^2}{36a^6s^6}\cdot\sum_{j=1}^{6}\left\{\omega_j^3\cdot\left[\sum_{n=1}^{6}\omega_n\cdot e^{a\omega_n sx}\cdot\int_0^x r(t)\cdot e^{a\cdot(\omega_j-\omega_n)st}\cdot r_{kj}(t)\cdot dt_{rjnrkj}\right]\right\}, \quad (16)$$

$$y_{k2}(x,s)=-\frac{\omega_k^3}{6a^2s^2}\cdot\sum_{n=1}^{6}\omega_n\cdot e^{a\omega_n sx}\cdot\int_0^x v(t)e^{a(\omega_k-\omega_n)st}\cdot dt_{vkn},\ k=1,2,3,4,5,6, \quad (17)$$

$$y_{k42}(x,s)=\frac{\omega_k^3}{36a^4s^4}\cdot\sum_{j=1}^{6}\left\{\omega_j^4\cdot\left[\sum_{n=1}^{6}\omega_n\cdot e^{a\omega_n sx}\cdot\int_0^x v(t)\cdot e^{a\cdot(\omega_j-\omega_n)st}\cdot v_{kj}(t)\cdot dt_{vjnvkj}\right]\right\}, \quad (18)$$

$$y_{k53}(x,s)=\frac{\omega_k^2}{36a^5s^5}\cdot\sum_{j=1}^{6}\left\{\omega_j^4\cdot\left[\sum_{n=1}^{6}\omega_n\cdot e^{a\omega_n sx}\cdot\int_0^x v(t)\cdot e^{a\cdot(\omega_j-\omega_n)st}\cdot r_{kj}(t)\cdot dt_{vjnrkj}\right]\right\}, \quad (19)$$

$$y_{k63}(x,s)=\frac{\omega_k}{36a^4s^4}\cdot\sum_{j=1}^{6}\left\{\omega_j^4\cdot\left[\sum_{n=1}^{6}\omega_n\cdot e^{a\omega_n sx}\cdot\int_0^x v(t)\cdot e^{a\cdot(\omega_j-\omega_n)st}\cdot p_{kj}(t)\cdot dt_{vjnpkj}\right]\right\}, \quad (20)$$

$$y_{k64}(x,s)=-\frac{\omega_k^3}{216a^6s^6}\cdot\sum_{m=1}^{6}\left\{\omega_m^4\cdot\left[\sum_{j=1}^{6}\omega_j^4\cdot\left(\sum_{n=1}^{6}\omega_n\cdot e^{a\omega_n sx}\cdot\left[\int_0^x\ldots\right]_{vjnvmjvkm}\right)\right]\right\}, \quad (21)$$

$$\left[\int_0^x\ldots\right]_{vjnvmjvkm}=\int_0^x v(t)\cdot e^{a\cdot(\omega_j-\omega_n)st}\cdot\left(\int_0^t v(\xi)\cdot e^{a\cdot(\omega_m-\omega_j)s\xi}\cdot v_{km}(\xi,s)\cdot d\xi\right)_{vmjvkm}\cdot dt_{vjnvmjvkm}, \quad (22)$$

$$v_{km}(\xi,s)=\int_0^{\xi} v(\theta)\cdot e^{a\cdot(\omega_k-\omega_j)s\theta}\cdot d\theta_{vkj} \quad (23)$$

Процесс итераций нам пришлось применять трижды.

Асимптотика решений дифференциального уравнения (1) при выполнении условий суммируемости коэффициентов полностью получена в формулах (5)-(23). Теорема 2 доказана.

Аналогичная методика применялась автором данной статьи для нахождения асимптотики решений дифференциальных уравнений второго и четвёртого порядка в работах [4, 5].

Другим методом была получена асимптотика решений дифференциального уравнения второго порядка в классической работе В.А. Садовничего и В.А. Винокурова [6]. Их методика на операторы порядка выше второго не переносится.

Список литературы

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

2. Юрко В.А. Введение в спектральную теорию. — М.: Физматлит, 2007.

3. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. — М.: Наука, 1970.

4. Митрохин С.И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами // Вестник Моск. ун-та. Сер.1, математика, механика. — 2009. — №3. — С. 14-17.

5. Митрохин С.И. О спектральных свойствах дифференциального оператора с суммируемым потенциалом и гладкой весовой функцией // Вестник СамГУ — естественнонаучная серия. — 2008. — №8/1(67). — С. 172-187.

6. Винокуров В.А., Садовничий В.А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма-Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Известия РАН. Серия: матем. — 2000. — Т. 64, №4. — С. 47-108.

«ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В МЕДИЦИНЕ»

Сочи, 22-25 сентября 2010

Биологические науки

ИЗУЧЕНИЕ ИММУНОКОРРИГИРУЮЩИХ СВОЙСТВ НОВОГО ПРОИЗВОДНОГО ФЕНОТРОПИЛА У КРЫС С ИНФОРМАЦИОННО-ФИЗИЧЕСКИМ СТРЕССОМ

Сережникова Т.К.[1],Самотруева М.А.[1], Тюренков И.Н.[2] , Теплый Д.Л.[3], Насунова Е.С.[3]

[1]Астраханская государственная медицинская академия,
[2]Волгоградский государственный медицинский университет,
[3]Астраханский государственный университет, Россия

Система иммунитета является высокочувствительной, чутко реагирующей на любые повреждающие воздействия. Различные стрессогенные факторы неоднозначно влияют на иммунную систему и могут приводить как к активации, так и к угнетению защитных механизмов организма. Изучение изменений иммунореактивности, развивающихся на фоне различных видов стресса, и поиск фармакологических средств коррекции является важной и актуальной проблемой. Цель нашей работы — изучение иммунокорригирующих свойств нового производного фенотропила под лабораторным шифром РГПУ-154 в условиях информационно-физического стресса. Исследование проведено на 30 крысах линии Wistar. Животные были разделены на группы (n=10): контроль 1 — интактные особи; контроль 2 — информационно-физический стресс (чередование двух видов нагрузок: физической — плавание с грузом 10% от массы тела, время «до предела» и информационной — формирование пищедобывательного поведения в многоальтернативном лаби-