СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛИ ОКЕАНА

Куттыкожаева Ш.Н., Наурызбаева А.А.

Кокшетауский государственный университет им. Ш. Уалиханова, Кокшетау, e-mail: shaharzat@mail.ru

В работе изучается сходимость разностных схем линейной модели океана. Исследуется сходимость итерационного метода по физическим факторам для линейных сеточных уравнений модели океана.

Рассмотрим краевые задачи модели океана в области Ω:

$$\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} + \mu \Delta v - \hat{\nabla} P = f, \qquad (1)$$

$$\partial iv v = \partial \hat{i} v v + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = \rho g,$$

$$\partial \hat{i} v v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \quad v = (v_1, v_2), \qquad (3)$$

$$v\Big|_{x_3=0} = v\Big|_{x_3=H} = 0,$$

$$v_3\Big|_{x_3=H} = v_3\Big|_{x_3=0} = 0, \quad v\Big|_{\gamma} = 0. \qquad (4)$$

Введем множество

$$\bar{\Omega}_1 = \left\{ \begin{matrix} x = x_1, x_2, x_3), & x_1 = (i-1/2)h, & x_2 = jh, & x_3 = kh, \\ 0 \le i \le N+1, & 0 \le j \le N, & 0 \le k \le N & \end{matrix} \right\},$$

$$\bar{\Omega}_2 = \left\{ \begin{matrix} x = (x_1, x_2, x_3), & x_1 = ih, & x_2 = (j-1/2)h, & x_3 = kh \\ 0 \le i \le N & 0 \le j \le N+1, & 0 \le k \le N & \end{matrix} \right\},$$

$$\bar{\Omega}_3 = \left\{ \begin{matrix} x = (x_1, x_2, x_3), & x_1 = ih, & x_2 = jh, & x_3 = (k-1/2)h, \\ 0 \le i \le N & 0 \le j \le N & 0 \le k \le N+1 & \end{matrix} \right\},$$

$$\bar{\Omega}_h = \left\{ \begin{matrix} x = (x_1, x_2, x_3), & x_1 = ih, & x_2 = jh, & x_3 = kh, \\ 0 \le i, j, k \le N & & & \end{matrix} \right\}.$$

Рассмотрим разностную схему первого порядка, аппроксимирующую уравнения (1)-(3).

$$\mu_0 u_{x_3 \bar{x}_3} + \mu \Delta_h u - \hat{\nabla}_h Q = f_h, \qquad (5)$$

$$div_h \vec{u} = d\hat{i}v_h u + u_{\bar{x}_3} = 0, \qquad (6)$$

$$-Q_{x_3} = \rho g, \qquad (7)$$

$$u = (u_1, u_2)\Big|_{S_h=0} = 0, \quad S_h - \text{ в границе } \Omega_h \qquad (8)$$

$$u_3\Big|_{x_3=0} = u_3\Big|_{x_3=1} = 0. \qquad (9)$$

Теорема 1. *Пусть решение задачи (1)-(4) достаточно гладкое. Тогда имеет место оценка* $\|u - v\|_1^2 \le Ch^2$.

Рассмотрим полунеявный итерационный метод

$$B \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \mu_0 u^n_{x_3 \bar{x}_3} + \mu \Delta_h u^n - \tilde{f}_h, \quad \sum_{k=1}^{N} d\hat{i}v_h u^{n+1} = 0, \qquad (10)$$

$$B \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} + \hat{\nabla}_h \xi^{n+1} = 0,$$

$$B \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \mu_0 u^n_{x_3 \bar{x}_3} + \mu \Delta_h u^n - \hat{\nabla}_h \xi^{n+1} - \tilde{f}_h, \qquad (11)$$

$$u^{n+1} = 0 \quad \text{на} \quad S_h, \quad u^0 = u_0, \quad x \in \Omega_h.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{N} d\hat{i}v_h u^{n+1} = 0, \quad \xi^{n+1}_{x_3} = 0, \qquad (12)$$

с условиями (11). Введем пространство

$$V_h^1(\Omega_h) = \left\{ \|u\|_1 \le C < \infty, \ \sum_{k=1}^{N} d\hat{i}v_h u h_3 = 0, \ u = 0 \ \text{на границе} \ S_h \right\}$$

и пусть B – положительный ограниченный оператор, определенный на $V_h^1(\Omega)$. Схему (11), (12) можно записать в операторной форме

$$\mathrm{B}\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \mathrm{A}u^n - \tilde{f}_h. \qquad (13)$$

Оператор A – проекция оператора $\mu_0 u_{x_3\bar{x}_3} + \mu\Delta_h u^n - \hat{\nabla}_h \xi^{n+1}$ в пространство $V_h^1(\Omega_h)$. Предложим, что

$$\gamma_1 \mathrm{B} \le \mathrm{A} \le \gamma_2 \mathrm{B}, \qquad (14)$$

где γ_1, γ_2 – положительные постоянные.

Из общей теории итерационных методов легко доказывается [1]:

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (14). Тогда схема простой итерации (13) сходится к решению задач (3)-(4)*

$$\left\| u - u^{n+1} \right\| \le q^n \left\| u - u_0 \right\|, \quad q = \frac{1-\aleph}{1+\aleph}, \quad \aleph = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Список литературы

1. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 590 с.

2. Кобельков Г.М. О численных методах решения уравнений Навье-Стокса в переменных скорости-давления // Вычислительные процессы и системы. – Вып. 8. – М.: Наука, 1991. – С. 204-230.

ПРИМЕНЕНИЕ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ РАСТВОРОВ ЭЛЕКТРОЛИТОВ

Танганов Б.Б., Бубеева И.А., Багаева Т.В.

Восточно-Сибирский государственный технологический университет, Улан-Удэ, e-mail-tanganov@rambler.ru

Растворы электролитов, в значительной мере определяющие уровень современной химической технологии, продолжают оставаться предметом многочисленных исследований с применением всего арсенала теоретических и экспериментальных методов.

Огромный экспериментальный материал по свойствам растворов электролитов, накопленный к настоящему времени, нуждается в теоретических обобщениях в рамках различных моделей, удовлетворяющих в той или иной степени, реальным взаимодействиям на микроскопическом уровне.

При этом значительные усилия затрачиваются на исследование индивидуальных характеристик ионов в растворах и их кинетических свойств, называемых транспортными или диссипативными.

В ряду наиболее важных транспортных свойств как электропроводность, вязкость, диффузия и теплопроводность растворов электролитов, одним из самых интересных как с прикладной, так и фундаментальной точки зрения является теплопроводность.

Растворы электролитов широко используются в технологических целях. Несмотря на это их теплопроводность изучена недостаточно, а имеющиеся в литературе сведения, противоречивы.

В основе данной работы лежат фундаментальные разработки по изучению и оценке транспортных характеристик в растворах, разработанных на кафедре неорганической и аналитической химии ВСГТУ под руководством д.х.н., проф. Танганова Б.Б. и д.х.н., проф. Балданова М.М.

На растворах электролитов была апробирована теоретическая модель оценки теплопроводности водных растворов электролитов в широком диапазоне изменения концентраций и температур. Данная модель основывается на ион-дипольном взаимодействии, учитывающемся в уравнениях для оценки сольватных чисел большинства ионов с известными радиусами, масс и радиусов сольватированных ионов. Кроме того решена проблема подвижности ионов и молекул электролитов, основанная на использовании приведенных масс и размеров гидратированных частиц, параметра Дебая и др. В общем виде уравнение для определения коэффициента теплопроводности имеет вид:

$$\lambda = \frac{\left(\frac{5}{2}RT - 2\hbar\omega\right)\cdot N_A}{6\pi\cdot\mu\cdot r_s\cdot b\cdot\left(1+\frac{r_s}{r_d}\right)},$$

где R – газовая постоянная; T – температура, К; $\hbar\omega = \sqrt{\frac{4\pi\cdot z_i^2\cdot e^2\cdot\hbar^2\cdot C\cdot N_A}{1000\mu}}$ – энергия колебательного процесса «ассоциация – диссоциация»; $z_i e$ – элементарный заряд; $\hbar$ – постоянная Планка; C – концентрация раствора, моль/л; N_A – постоянная Авогадро; $\mu = \frac{m_{Kt}\cdot m_{An}}{m_{Kt}+m_{An}}$ – приведенная масса несольватированных ионов; m_i – молярная масса иона; $r_s = \sqrt[3]{\frac{25 z_i\cdot e\cdot p\cdot\hbar^2\cdot n_s}{3M\cdot R_s\cdot k_Б^2\cdot T^2}}$ –