студентов творчески и осмысленно фиксировать самое важное и обращать внимание на аргументацию и обоснование научных положений. Все это привело к тому, что по мере накопления студентами знаний и навыков повышалась их самостоятельность, совершенствовались и усложнялись приемы работы по усвоению учебного материала. А на старших курсах студенты применяли такие новые формы как составление тезисов, рецензий, рефератов.

Таким образом, именно лекция помогала развивать такие качества как активность, самостоятельность, усидчивость, а бригадно-лабораторный метод напротив лишь расхолаживал студентов.

Математические науки

ЯВНЫЕ МЕТОДЫ ТИПА РУНГЕ-КУТТЫ И ИХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АНАЛОГИ

Ващенко Г.В.

Сибирский государственный технологический университет, Красноярск, e-mail: algo_v@mail.ru

Для численного решения задачи Коши рассматриваются параллельные аналоги алгоритмов явных методов типа Рунге-Кутты для систем обыкновен ных дифференциальных уравнений первого порядка. Предложены параллель ные вычислительные схемы методов, ориентированных на применение в много процессорных вычислительных системах кластерной архитектуры.

Рассматривается задачи Коши для систем обыкновенных дифференциаль ных уравнений первого порядка

$$y' = f(t, y)\,, \quad y(t_0) = y^0. \qquad (1)$$

Для численного решения задачи (1) применяется явные s-стадийные методы типа Рунге-Кутты, $(n + 1)$-й шаг в которых задается формулами

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} + h_{n+1}\sum_{i=1}^{s} b_i K_i^{(n)}, \qquad (2)$$

где $K_i^{(n)} = f(t_n + c_i h_{n+1}, \;\; y^{(n)} + h_{n+1}\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j^{(n)}),$

$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s.$

Конкретный метод Рунге – Кутты определяется набором коэффициентов b_i, c_i, a_{ij}, $1 \le i \le s$, $2 \le j \le (i - 1)$ [2–4].

Основной подход при конструировании параллельных методов состоял в распараллеливании последовательных численных алгоритмов, использовании декомпозиции и анализе информационных взаимосвязей между подзадачами [1, 5].

1. Последовательная вычислительная схема

Для определенности зададимся некоторым отрезком $[t_0, T]$, введем равномерную сетку $w_n = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ с величиной шага $h_{n+1} = h$ и на сетке w_n в начальный момент времени t_0 в качестве начального условия зададим вектор $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_N^{(0)})$. Определение значений компонент вектора приближенного решения $\tilde{y}^{(n+1)} = (\tilde{y}_1^{(n+1)}, \tilde{y}_2^{(n+1)}, \ldots, \tilde{y}_N^{(n+1)})$ осуществляется по формуле (2), записанной для вычисления каждой компоненты вектора $\tilde{y}^{(n+1)}$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{y}_j^{(n+1)} &= \tilde{y}_j^{(n)} + h[b_1 K_{1,j}^{(n)} + b_2 K_{2,j}^{(n)} + \ldots + b_s K_{s,j}^{(n)}], \\ y_j^{(0)} &= y_j(t_0),\ \ j = 1, 2, \ldots,\ N, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где $K_m^{(n)} = f_j(t_n + c_s h, \tilde{y}^{(n)} + h\sum_{k=1}^{m-1} a_{m,k} K_k^{(n)}), \quad m = 1,\ 2,\ \ldots,\ s.$

Формулы (2) и (3) показывают, что определение значения $\tilde{y}^{(n+1)}$ сводится к строго последовательному вычислению коэффициентов $K_1^{(n)}, K_2^{(n)}, \ldots, K_s^{(n)}$, их умножению на коэффициенты b_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, соответственно, и последующему суммированию.

2. Параллельная явная s –стадийная вычислительная схема

Последовательная схема (3) дает основание для организации двух типов параллельных вычислений:

а) вычисление отдельных компонент векторов коэффициентов $K_1^{(n)}, K_2^{(n)}, \ldots, K_s^{(n)}$ и вектора численного решения $\tilde{y}^{(n+1)} = (\tilde{y}_1^{(n+1)}, \tilde{y}_2^{(n+1)}, \ldots, \tilde{y}_N^{(n+1)})$;

б) вычисление отдельных операций внутри одного шага метода.

Вычисление отдельных операций внутри одного шага метода обеспечивает небольшую степень параллелизма и поэтому не рассматривается.

С целью выявления максимального независимого набора операций при вычислении коэффициентов $K_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots, s$ используется аппарат графов зависимости. Анализ графа зависимостей, в предположении, что размерность N исходной системы (1) кратна числу компьютеров p, $N = kp$ и схема размещения блочная обеспечивает возможность записи параллельных схем. В каждом компьютере размещено и вычисляется последовательно по k компонент векторов коэффициентов, $K_1^{(n)}, K_2^{(n)}, \ldots, K_s^{(n)}$. Вычисления $\tilde{y}^{(n+1)}$ в n-м узле сетки w_n реализуются по правилу, показанному ниже.

Вычисление коэффициентов и вектора приближенного решения при $N = kp$

Алгоритм. Пусть задана система (1), правая часть которой гладкая по всем аргументам y_i, $1 \le i \le N$ и пусть на заданном отрезке $[t_0, T]$ определена равномерная сетка w_n. Тогда для решения задачи Коши вычислительной системе из $p = N/k$ компьютеров, $Comp(i)$, $1 \le i \le N$, и блочной схемой хранения, справедлив параллельный алгоритм.

Шаг 1. Вычислить $K_{1,l_z}^{(n)}$ и $\alpha_{2,l_z}^{(n)}$ по формулам

$$\alpha_{2,l_z}^{(n)} = y_{l_z}^{(n)} + ha_{m,1}K_{1,l_z}^{(n)}, \quad z=1,\ 2,\ \ldots,\ p;\quad l_z=(z-1)k+1,\ 2,\ \ldots,\ zk\ ,$$

и переслать $K_{1,l_z}^{(n)}$ и $\alpha_{2,l_z}^{(n)}$ всем $(p-1)$ компьютерам.

Шаг 2. Вычислить $K_{2,l_z}^{(n)}$ и $\alpha_{3,l_z}^{(n)}$ по формулам

$$\alpha_{3,l_z}^{(n)} = y_{l_z}^{(n)} + h\sum_{j=1}^{2} a_{m,j}K_{j,l_z}^{(n)}, \quad z=1,\ 2,\ \ldots,\ p;\quad l_z=(z-1)k+1,\ 2,\ \ldots,\ zk$$

и переслать $K_{2,l_z}^{(n)}$ и $\alpha_{3,l_z}^{(n)}$ всем $(p-1)$ компьютерам.

. . . .

Шаг *s*. Вычислить $K_{s,l_z}^{(n)}$.

Шаг (*s* + 1). Вычислить

$$y_{l_z}^{(n+1)} = y_{l_z}^{(n)} + \sum_{m=1}^{s} b_m K_{m,l_z}^{(n)}, \quad z = 1, 2, \ldots, p;\ \ l_z = (z-1)k+1, 2, \ldots, zk.$$

Шаг (*s* + 2). Сохранить $\tilde{y}_{l_z}^{(n)} = \tilde{y}_{l_z}^{(n+1)}$.

Шаг (*s* + 3). Переслать $\tilde{y}_{l_z}^{(n+1)}$ всем $(p-1)$ компьютерам.

На последнем шаге в каждом компьютере вычисляется и сохраняется своя часть вектора $\tilde{y}^{(n+1)}$. Таким образом, после параллельного вычисления коэффициентов параллельно определяется такое же количество компонент вектора приближенного решения $\tilde{y}^{(n+1)}$. Число пересылок для одного узла сетки w_n составит $s(p-1)^2 \approx O(sp^2)$.

Параллельный аналог формулы (3) для равномерной сетки может быть записан в виде

$$y_{l_z}^{(n+1)} = y_{l_z}^{(n)} + \sum_{m=1}^{s} b_m K_{m,l_z}^{(n)}, \quad z = 1, 2, \ldots, p;\quad l_z = (z-1)k+1, 2, \ldots, zk,$$

где $K_{m,l_z}^{(n)} = f_{l_z}(t_n + c_s h, \tilde{y}^{(n)} + h\sum_{k=1}^{m-1} a_{m,k}K_{k,l_z}^{(n)}), \quad m=1,\ 2,\ \ldots,\ s.$

Заметим, что в отдельных случаях, зависящих от типа и вида исходной системы (1), может быть достигнута максимальная степень параллелизма и, соответственно, сокращение временных затрат выполнения вычислений по разработанному алгоритму. Так, например, для двустадийной схемы Рунге-Кутты параллельный алгоритм записывается следующим образом.

Шаг 1. Вычислить $K_{1,l_z}^{(n)}$ и $\alpha_{2,l_z}^{(n)}$ по формулам

и переслать $K_{1,l_z}^{(n)}$ и $\alpha_{2,l_z}^{(n)}$ всем $(p-1)$ компьютерам.

$$\alpha_{2,l_z}^{(n)} = y_{l_z}^{(n)} + ha_{m,1}K_{1,l_z}^{(n)}, \quad z=1,\ 2,\ \ldots,\ p;\quad l_z=(z-1)k+1,\ 2,\ \ldots,\ zk.$$

Шаг 2. Вычислить $K_{2,l_z}^{(n)}$ и $\alpha_{3,l_z}^{(n)}$ по формулам

$$\alpha_{3,l_z}^{(n)} = y_{l_z}^{(n)} + h\sum_{j=1}^{2} a_{m,j}K_{j,l_z}^{(n)}, \quad z=1,\ 2,\ \ldots,\ p;\quad l_z=(z-1)k+1,\ 2,\ \ldots,\ zk.$$

Шаг 3. Вычислить

Шаг 4. Сохранить $\tilde{y}_{l_z}^{(n)} = \tilde{y}_{l_z}^{(n+1)}$.

$$y_{l_z}^{(n+1)} = y_{l_z}^{(n)} + \sum_{m=1}^{2} b_m K_{m,l_z}^{(n)}, \quad z = 1, 2, \ldots, p;\ \ l_z = (z-1)k+1, 2, \ldots, zk.$$

Шаг 5. Переслать $\tilde{y}_{l_z}^{(n+1)}$ всем $(p-1)$ компьютерам.

Рассмотренные параллельные схемы явных методов типа Рунге-Кутты ориентированы на реализацию в многопроцессорных вычислительных системах кластерной архитектуры с использованием технологии MPI. MPI имеет в составе коммуникационные операции попарные и коллективные обмены, средства организации виртуальных топологий. Исследования представленных параллельных схем показали, что для их реализация наиболее подходящими могут быть топологии кольцо, линейка, решетка и гиперкуб. Разработанные схемы могут служить основой для разработки параллельных алгоритмов решения задачи Коши явными методами с контролем точности и устойчивости, алгоритмов переменного порядка и шага, а также возможной автоматизации построения методов интегрирования с адаптивной областью устойчивости.

Список литературы

1. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. – СПб.: БХВ – Петербург, 2002. – 806 с.

2. Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем. – Новосибирск: Наука, 1997. – 197 с.

3. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1999. – 685 с.

4. Jackson K., Norsett S. The potential for parallelism in Runge -Kutta methods. Part I: RK formulas in standart form // SIAM J. Numer. Anal. – 1996. – Vol. 32. – P. 49–82.

5. Hendrickson B., Kolda Tamara G. Graph partitioning models for parallel computing // Parallel Computing. – 2002. – T. 26, № 12. – P. 181–197.

Медицинские науки

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ КЛЮЧЕВЫХ ЗУБОВ ПРИ АСИММЕТРИИ ЗУБНЫХ ДУГ

Дмитриенко С.В., Дмитриенко Д.С., Климова Н.Н., Севастьянов А.В., Климова Т.Н.

Кафедра стоматологии детского возраста, Волгоградский государственный медицинский университет, Волгоград, e-mail: nata.klimova@mail.ru

Асимметрия зубной дуги нередко обусловлена различным количеством зубов на каждой ее половине, несимметричном расположении антимеров при полном комплекте зубов, либо при несоответствии размеров зубов правой и левой полудуг.

Целью настоящего исследования было определение положения ключевых зубов, а именно первых постоянных моляров и клыков, при асимметрии зубных дуг. Проведено биометрическое исследование 27 моделей челюстей, полученных у пациентов после ортодонтического лечения с односторонним удалением одного премоляра. Основной фронтальной точкой на верхней челюсти была точка, расположенная у переднего края резцового сосочка, хорошо определяемого на гипсовых моделях. На клыках точки располагались в межзубных промежутках с язычной стороны, а на первых молярах – на середине дистальной поверхности окклюзионного контура. Проводили измерения обеих полудуг, одну из которых называли полной, другую неполной (при отсутствии одного из премоляров).

Результаты исследования показали, что отмечалось укорочение зубочелюстных дуг на неполной стороне и неравномерное удалении зубов от условной линии фронтально-дистальной диагонали. Однако линейные параметры не позволяли оценить положение ключевых зубов на неполной половине зубной дуги. В связи с этим нами предложено измерять длину фронтально-дистальной диагонали зубо-альвеолярной дуги на полной её половине и это размер откладывать на неполной полудуге. Условная точка располагалась на окклюзионной поверхности второго моляра на расстоянии от антимера, равному сумме 6 зубов полной половины дуги, что в норме соответствовало ширине зубо-альвеолярной дуги между первыми постоянными молярами.

ВЛИЯНИЕ ОДНОСТОРОННЕГО УДАЛЕНИЯ ПЕРВОГО ПРЕМОЛЯРА НА ФОРМУ И РАЗМЕРЫ ЗУБНЫХ ДУГ

Дмитриенко С.В., Дмитриенко Д.С., Климова Н.Н., Севастьянов А.В., Климова Т.Н.

Кафедра стоматологии детского возраста, Волгоградский государственный медицинский университет, Волгоград, e-mail: nata.klimova@mail.ru

Одностороннее удаление премоляра, как правило, приводит к смещению линии эстетического центра, мезиальному смещению моляров, дистальному смещению клыков. В то же время определяется ряд ключевых позиций, определяющих актуальность дальнейшего изучения данной проблемы. В частности, не достаточно сведений о взаимосвязи линейных параметров зубо-челюстных дуг, и особенно фронтально-дистальной диагонали при асимметрии формы зубо-челюстных дуг.

Проведено биометрическое исследование 27 моделей челюстей, полученных у пациентов после ортодонтического лечения с односторонним удалением одного премоляра. Основной фронтальной точкой на верхней челюсти была точка, расположенная у переднего края резцового сосочка, хорошо определяемого на гипсовых моделях. На клыках точки располагались в межзубных промежутках с язычной стороны, а на первых молярах – на середине дистальной поверхности окклюзионного конту-