УДК 372.851

ОБ ИСТОРИИ ОДНОГО ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО СРАВНЕНИЯ

Абасов Р.З.

Азербайджанская государственная нефтяная академия, Баку, e-mail: mutarjim@mail.ru

В данной работе ставится цель ознакомить читателя с некоторыми известными способами для сравнения логарифмических выражений и , сделать хронологический анализ и сравнение этих методов и получить некоторые обобщенные способы по этой теме.

Ключевые слова: логарифмические выражения, сравнение логарифмов чисел, хронологический анализ, упражнение, функция, теорема

THE HISTORY OF THE LOGARITHMIC COMPARISON

Abasov R.Z.

Azerbaijani state oil academy, Baku, e-mail: mutarjim@mail.ru

The different ways of comparison logab and logcd logarithmic expressions are analyzed in this article. Two generalized theorems are proved in order to compare these expressions.

Keywords: logarithmic expression, comparing the logarithms of numbers, a chronological analysis, exercise, function, theorem

Сравнение логарифмов чисел без помощи таблиц является одной из часто встречающихся задач в различных упражнениях школьной математики. В множестве таких задач особое место занимает сравнение логарифмических выражений, как $\log_a b$ и $\log_c d$, где числа *a, b, c, d* удовлетворяют некоторым необходимым условиям. В школьных учебниках не указываются особые приемы для сравнения этих выражений, и опыт показывает, что школьники затрудняются при решении подобных задач. По этой причине в данной работе ставится цель: ознакомить читателя с некоторыми известными способами для сравнения логарифмических выражений $\log_a b$ и $\log_c d$, сделать хронологический анализ и сравнение этих методов и получить некоторые обобщенные способы по этой теме.

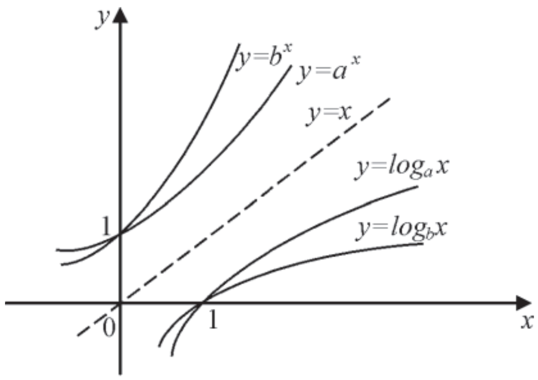
Таких методов в литературе немного. В некоторых из них для сравнения выражений $\log_a b$ и $\log_c d$ принимается условие $a - b = c - d$. Но, есть и примеры, где $a - b \neq c - d$. Поэтому, следует найти и такие обобщенные способы сравнения этих выражений, когда $a - b \neq c - d$.

Сначала отметим одно свойство логарифмической функции $y = \log_a x$ при $a > 1$. Легко проверить, что если $b > a > 1$

$$\log_a x < \log_b x, \text{ при } 0 < x < 1, \qquad (1)$$

$$\log_a x > \log_b x, \text{ при } x > 1, \qquad 2)$$

Справедливость этих утверждений очевидна из рисунка.



Сначала ознакомим читателя со способом, изложенным в работе [5], где $a - b = c - d$.

Предложение 1. Пусть $b > a > 1$ и $k > 0$. Тогда справедливо неравенство

$$\log_a b > \log_{a+k}(b + k), \qquad (3)$$

Доказательство. Легко проверить, что при условии $b > a > 1$ и $k > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{b}{a} > \frac{b+k}{a+k} > 1.$$

Тогда имеем,

$$\log_a \frac{b}{a} > \log_a \frac{b+k}{a+k} > \log_{a+k} \frac{b+k}{a+k}.$$

Отсюда получим,

$$\log_a b - 1 > \log_{a+k}(b+k) - 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log_a b > \log_{a+k}(b+k).$$

Например,

$$\log_2 3 > \log_3 4 > \log_4 5 > ...$$

Еще раз отметим, что в неравенстве (3) выполняется равенство $a - b = c - d$. Более слабый вариант этого неравенства доказывается в работе [4].

Предложение 2. Для каждого натурального $n > 1$ доказать, что

$$\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2). \qquad (4)$$

Доказательство этого неравенства проводится почти как и доказательство неравенства (3), и поэтому мы его доказывать не будем. Отметим только то, что имея неравенство (3), не было необходимости доказывать более слабого неравенства (4). Причем эти неравенства доказаны в соответствующих журналах, с небольшой разницей во времени. В [4] рассмотрены еще следующие два примера:

$$\log_{20} 80 > \log_{80} 640, \qquad (5)$$

$$\log_3 7 > \log_7 27. \qquad (6)$$

В этих неравенствах $a - b \neq c - d$ и поэтому для их доказательства нельзя применять формулу (3) или (4). Упростим заданные логарифмы в (5), приведя их к одному основанию:

$$\log_{20} 80 = 1 + 2\log_{20} 2 = 1 + \frac{2}{\log_2 20},$$

$$\log_{80} 640 = 1 + 3\log_{80} 2 = 1 + \frac{3}{\log_2 80}.$$

При этом легко проверяется, что

$$\frac{2}{\log_2 20} < \frac{3}{\log_2 80} \Leftrightarrow 2\log_2 80 < 3\log_2 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 6400 < \log_2 8000.$$

Отсюда и получается неравенство (5).

Для доказательства неравенства (6) применяется другой способ. Поскольку

$$\log_7 27 = 3\log_7 3 = \frac{3}{\log_3 7},$$

то неравенство (6) принимает вид $\log_3^2 7 > 3$ или $7 > 3^{\sqrt{3}}$. Учитывая, что $\sqrt{3} < 1,75 = \frac{7}{4}$, проверим истинность неравенства $7 > 3^{7/4}$ или $7^4 > 3^7$. А это справедливо, так как $7^4 = 2401$ и $3^7 = 2187$.

Анализ неравенств (5) и (6) наводит на мысль, что можно написать бесконечно много неравенств вида (5) или (6), когда $a - b \neq c - d$. И поэтому, следует доказывать общие теоремы о сравнении логарифмических выражений вида $\log_a b$ и $\log_c d$, когда параметры *a, b, c* и *d* удовлетворяют некоторым конкретным условиям.

Теорема 1. Пусть $b > a > 1$, $d > c > 1$ и $a < c$. Если при этих условиях дополнительно выполняется условие $bc > ad$, то верно неравенство

$$\log_a b > \log_c d. \qquad (7)$$

Доказательство: Сначала отметим, что неравенство $bc > ad$ равносильно неравенству $\frac{b}{a} > \frac{d}{c}$. Тогда, учитывая (2) и свойства монотонности логарифмической функции получим:

$$\log_a \frac{b}{a} > \log_c \frac{b}{a} > \log_c \frac{d}{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_a b - 1 > \log_c d - 1 \Rightarrow \log_a b > \log_c d.$$

Аналогично доказывается

Теорема 2. Пусть $a > b > 1$, $c > d > 1$ и $a < c$. Если дополнительно выполняется условие $bc < ad$, то верно неравенство

$$\log_a b < \log_c d. \qquad (8)$$

Легко проверить, что неравенства (3) и (4) являются частными случаями неравенства (7). Очевидно, что исходя из (7) и (8), мы можем написать такие логарифмические неравенства, которые невозможно получить из (3) и (4), где выполняется равенство $a - b = c - d$. Это жесткое условие заменено в (7) и (8)более слабым условием, как $bc > ad$ и $bc < ad$ соответственно. Например,

$$\log_{3,5} 4,2 > \log_{3,7} 4,32 \ (4,2 \cdot 3,7 > 3,5 \cdot 4,32)$$

или

$$\log_{\sqrt{3}} 1,65 < \log_4 3,9 \ (1,65 \cdot 4 < \sqrt{3} \cdot 3,9).$$

Ясно, что если в других литературах встретимся с логарифмическими сравнениями, которые удовлетворяют условиям Теорем 1 или 2, без всякого вычисления сразу можно написать верное сравнение, как результат этих теорем. Например, в [4] требуется доказать два неравенства

$$\log_3 7 > \log_{13} 17 \text{ и } \log_3 14 > \log_7 18,$$

справедливость которых сразу следует из (7). В [6] сложным и неэффективным способом доказывается неравенство

$$\log_{\sqrt{2}} \frac{6}{11} < \log_{2/5} \pi,$$

хотя и это неравенство сразу следует из [7]. Но, для этого нужно сперва умножить обе части этого неравенства на (–1). Тогда данное неравенство запишется в виде

$$\log_{\sqrt{2}} \frac{11}{6} > \log_{2,5} \pi.$$

А это неравенство удовлетворяет всем требованиям Теоремы 1 и также условию $bc > ab$, так как

$$\frac{11}{6}\cdot 2{,}5 > \sqrt{2}\cdot\pi.$$

Аналогичным образом можно применять Теорему 2 к доказательствам соответствующих неравенств.

Продолжим ознакомление со способами сравнений выражений $\log_a b$ и $\log_c d$. Но, сперва отметим одно важное обстоятельство о теоремах 1 и 2. Дело в том, что эти теоремы устанавливают только достаточные условия для выполнения неравенств (7) и (8). Это означает, что, например, при тех же условиях Теоремы 1 неравенство (7) может удовлетворяться даже в случае, когда $bc < ad$. Для этого случая приведем два примера: $\log_3 7 > \log_7 27$ ($7\cdot 7 < 3\cdot 27$) [4, 54] и $\log_3 4 > \log_7 10$ ($4\cdot 7 < 3\cdot 10$) [6, 48].

Аналогичные примеры можно показать и по Теореме 2.

Теперь рассмотрим методику о сравнении выражений вида $\log_a M$ и $\log_b N$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$ [6]. Если удастся найти такое целое k, что $\log_a M < k$,, $k < \log_b N$, то отсюда можно сделать заключение, что $\log_a M < \log_b N$. Если начальное положение этих логарифмов имеет вид $k-1 < \log_a M < k$, и $k-1 < \log_b N < k$, то отсюда нельзя найти искомое сравнение. Тогда следует подобрать такое натуральное n, чтобы между $n\log_a M$ и $n\log_b N$ оказалось некоторое целое число p. Подбор этого числа n осуществляется последовательными пробами. Если число n найдено так, что $n\log_a M < p < n\log_b N$, то вытекает вывод, что $\log_a M < \log_b N$.

Далее, автор работы [6] этим же способом находит сравнение $\log_3 4 > \log_7 10$. Для этого подходит $n = 4$. Так как

$$4\log_3 4 = \log_3 256 > 5 \text{ и}$$

$$4\log_7 10 = \log_7 10000 < 5,$$

то и

$$4\log_3 4 > 4\log_7 10,$$

отсюда $\log_3 4 > \log_7 10$. Таким же образом доказывается неравенство

$$\log_{\sqrt{2}}\frac{6}{11} < \log_{2/5}\pi$$

Для этого подходит число $n = 2$. Но, как уже сказано выше, это неравенство сразу получается из (7).

Как видно из этих двух примеров, и вообще, число проб, для подбора нужного n зависит от самой задачи и даже может быть очень велико. Но важно, что такое n всегда существует и это доказывается в [6].

Для сравнения логарифмических выражений вида $\log_n(n+1)$ в [2] рассматривается функция $f(x) = \log_x(x+1)$. Доказывается, что эта функция монотонно убывает в интервале $(1, +\infty)$. Тогда сразу можем написать, например

$$\log_4 5 > \log_5 6 > \log_6 7 > \ldots$$

При сравнении подобных логарифмов в [3] применяется уникальный способ – используется свойство об арифметической и геометрической средней положительных чисел. Например, неравенство $\log_4 5 > \log_5 6$ доказывается следующим образом:

$$\sqrt{\frac{\log_5 6}{\log_4 5}} = \sqrt{\log_5 4\cdot\log_5 6} < \frac{\log_5 4 + \log_5 6}{2} = \frac{\log_5 24}{2} < 1 \Rightarrow \log_5 6 < \log_4 5.$$

Отметим, что таким же путем можем доказать, что последовательность с общим членом $\log_n(n+1)$ монотонно убывает:

$$\sqrt{\frac{\log_{n+1}(n+2)}{\log_n(n+1)}} = \sqrt{\log_{n+1} n\cdot\log_{n+1}(n+2)} < \frac{\log_{n+1} n + \log_{n+1}(n+2)}{2} =$$

$$= \frac{\log_{n+1}(n^2+2n)}{2} < \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \log_{n+1}(n+2) < \log_n(n+1).$$

Интересно, что исследования по названной теме продолжаются и по сей день. Отметим, только то, что предложенные в современных работах способы для сравнения указанных логарифмических выражений, по существу, являются незначительными видоизменениями известных способ найденных 25-30 лет тому назад. Покажем один пример из работы [1]. Для сравнения чисел $\log_3 5$ и $\log_2 3$ предлагается следующий способ. Каждое данное число умножается на 2:

$$2\log_3 5 = \log_3 25 \Rightarrow 2 < \log_3 25 < 3;$$

$$2\log_2 3 = \log_2 9 \Rightarrow 3 < \log_2 9 < 4.$$

Отсюда,

$$\log_3 25 < \log_2 92 \Rightarrow \log_3 5^2 < \log_2 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log_3 5 < \log_2 3.$$

Ясно что этот способ полностью совпадает с методом, изложенным в [6] имеющим 26-летнюю давность, хотя автор называет эту методику «эффектом увеличительного стекла».

В работе [1] рассматривается еще два примера, для решения которых тоже применяются ранее известные способы. Так как при сравнении чисел $\log_{15}16$ и $\log_{16}17$, сначала рассматривается функция $f(x) = \log_x(x + 1)$ и доказывается, что она монотонна убывает в $(1; +\infty)$ (см. [2] и [3]), а для сравнения чисел $\log_4 3$ и $\log_3 2$ применяется известная теорема Коши о средних арифметических и средних геометрических.

И наконец, рассмотрим два примера из недавно изданной работы [7]. Для сравнения чисел $\log_2 3$ и $\log_3 4$ применяется тот же метод, который уже был применен в работах [6] и [1]. А для сравнения чисел $\log_{11}12$ и $\log_{12}13$ применяется неэффективный вариант той методики, которая была использована в статье [5].

Как видно, тема, затронутая в данной работе, не имеет большого объема, но давно находится в центре внимания. Для сравнения логарифмических выражений как $\log_a b$ и $\log_c d$ в этих работах предлагалось несколько способов. Но, вызывает сожаление только то, что некоторые способы, предложенные в этих работах, фактически являются повторением раннее известного метода, несмотря на то, что эти работы опубликованы в близких журналах как «Математика в школе» и «Квант». Те, которые хотят найти новые способы для сравнения этих выражений, должны учитывать эту заметку.

Список литературы

1. Гусева Н.Б., Сычева Г.В. О чем «молчит учебник» // Математика в школе. – 2000. – № 3. – С. 16-24.

2. Дорофеев Г.В. Применения производных при решении задач в школьном курсе математики // Математика в школе. – 1980. – № 5. – С. 12-21.

3. Дорофеев Г.В. Применения производных при решении задач в школьном курсе математики // Математика в школе. – 1980. – № 6. – С. 24-30.

4. Маргулис А.Я., Радунский Б.А. Учитесь работать с логарифмами // «Квант» . – 1972. – № 3. – С. 50-55.

5. Решения задач, помещенных в №3 журнала за 1969 г. // Математика в школе. – 1970. – № 1. – С. 83-87.

6. Розов Н.Х. Читатели советуют // «Квант» . – 1974. – № 3. – С. 48-51.

7. Хромов А.В. Сравнивая логарифмы, учимся творчеству // Математика в школе. – 2003. – № 2. – С. 32-33.