В этом случае минимизируется сумма «штрафов» z:

$$L = \sum_{l=1}^{e}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n} z_{ijl} \to \min. \qquad (7)$$

Данный перечень ограничений является неполным, он представлен в качестве иллюстративного примера. К преимуществам сведения задачи формирования учебного плана к задаче целочисленного линейного программирования можно отнести возможность «безболезненной» для алгоритма замены ограничений или критерия оптимальности, а также возможности решения данной задачи с помощью средств вычислительной техники.

ТРЕХМЕРНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ УЧЕТЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Гуреева Н.А., Клочков Ю.В., Николаев А.П.

Волгоградская государственная сельскохозяйственная академия, Волгоград, e-mail: natalya@gureeva.yandex.ru

Изложен в смешанной формулировке МКЭ алгоритм получения на шаге нагружения матрицы деформирования объемного шестигранного конечного элемента с узловыми неизвестными в виде приращений перемещений и приращений деформаций.

Для численной реализации алгоритма использован функционал, полученный из условия равенства возможной и действительной работ внешних и внутренних сил на шаге нагружения.

Для реализации метода конечных элементов в смешанной формулировке в геометрически нелинейной постановке получен функционал на шаге нагружения из условия равенства возможной и действительной работ внешних и внутренних сил.

Для расчета произвольных оболочек на шаге нагружения разработан объемный шестигранный конечный элемент в смешанной формулировке МКЭ с узловыми неизвестными в виде приращений перемещений и приращений деформаций.

1. Геометрия оболочки. Положение произвольной точки M^0 срединной поверхности оболочки в декартовой системе координат определяется радиус-вектором

$$\mathbf{R}^0 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z(x, y)\mathbf{k}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – орты декартовой системы координат; x, y, z –координаты точки M^0.

Векторы локального базиса точки M^0, касательные к срединной поверхности, определяются выражениями

$$\mathbf{a}_1^0 = \mathbf{R}^0,_x = \mathbf{i} + z,_x \mathbf{k}; \quad \mathbf{a}_2^0 = \mathbf{R}^0,_y = \mathbf{j} + z,_y \mathbf{k}. \qquad (2)$$

Базисный вектор точки M^0, нормальный к срединной поверхности, определяется векторным произведением

$$\mathbf{a}_3^0 = \frac{\mathbf{a}_1^0 \times \mathbf{a}_2^0}{\left|\mathbf{a}_1^0 \times \mathbf{a}_2^0\right|}. \qquad (3)$$

Выражения базисных векторов (2), (3) можно представить в матричном виде

$$\left\{\mathbf{a}^0\right\} = [M]\{\mathbf{i}\}; \quad \{\mathbf{i}\} = [M]^{-1}\left\{\mathbf{a}^0\right\}, \qquad (4)$$

где $\left\{\mathbf{a}^0\right\}^T = \left\{\mathbf{a}_1^0 \ \ \mathbf{a}_2^0 \ \ \mathbf{a}_3^0\right\}$; $\{\mathbf{i}\}^T = \{\mathbf{i} \ \ \mathbf{j} \ \ \mathbf{k}\}$.

Производные векторов (2), (3) с учетом (4) можно представить в матричном виде разложением по векторам локального базиса точки M^0 [2]

$$\left\{\mathbf{a}^0,_x\right\} = [m]\left\{\mathbf{a}^0\right\}; \quad \left\{\mathbf{a}^0,_y\right\} = [n]\left\{\mathbf{a}^0\right\}, \qquad (5)$$

где $\left\{\mathbf{a}^0,_x\right\}^T = \left\{\mathbf{a}_1^0,_x \ \ \mathbf{a}_2^0,_x \ \ \mathbf{a}_3^0,_x\right\}$;

$\left\{\mathbf{a}^0,_y\right\}^T = \left\{\mathbf{a}_1^0,_y \ \ \mathbf{a}_2^0,_y \ \ \mathbf{a}_3^0,_y\right\}$.

Рассмотрим точку M^{0t}, расположенную на расстоянии t от срединной поверхности. Ее положение определяется радиус-вектором

$$\mathbf{R}^{0t} = \mathbf{R}^0 + t\mathbf{a}_3^0. \qquad (6)$$

Векторы локального базиса точки M^{0t} определяются дифференцированием (6)

$$\mathbf{g}_1^0 = \mathbf{R}^{0t},_x = \mathbf{R}^0,_x + t\mathbf{a}_3^0,_x = \mathbf{a}_1^0\left(1 + tm_{31}\right) + \mathbf{a}_2^0 tm_{32} + \mathbf{a}_3^0 tm_{33};$$
$$\mathbf{g}_2^0 = \mathbf{R}^{0t},_y = \mathbf{R}^0,_y + t\mathbf{a}_3^0,_y = \mathbf{a}_1^0 tn_{31} + \mathbf{a}_2^0\left(1 + tn_{32}\right) + \mathbf{a}_3^0 tn_{33}; \qquad (7)$$
$$\mathbf{g}_3^0 = \mathbf{R}^{0t},_t = \mathbf{R}^0,_t + \left(t\mathbf{a}_3^0\right),_t = \mathbf{a}_3^0.$$

2. Перемещения и деформации. При реализации шагового нагружения произвольная точка срединной поверхности рассматривается в трех положениях: исходном M^{0t}, деформированном после j шагов нагружения M^t (вектор перемещения $\mathbf{V}$) и соседнем – после $(j + 1)$-го шага нагружения M^{t*} (вектор перемещения $\mathbf{w}$).

Перемещение точки M^{0t} за j шагов нагружения определяется вектором

$$\mathbf{V} = v^1\mathbf{a}_1^0 + v^2\mathbf{a}_2^0 + v^3\mathbf{a}_3^0 = \left\{\mathbf{a}^0\right\}^T\{v\}, \qquad (8)$$

где $\{v\}^T = \left\{v^1 \ \ v^2 \ \ v^3\right\}$.

Производные вектора (8) с учетом (5) определяются выражениями

$$\mathbf{V},_x = f_1^1\mathbf{a}_1^0 + f_1^2\mathbf{a}_2^0 + f_1^3\mathbf{a}_3^0;$$
$$\mathbf{V},_y = f_2^1\mathbf{a}_1^0 + f_2^2\mathbf{a}_2^0 + f_2^3\mathbf{a}_3^0; \qquad (9)$$
$$\mathbf{V},_t = v,_t^1\mathbf{a}_1^0 + v,_t^2\mathbf{a}_2^0 + v,_t^3\mathbf{a}_3^0,$$

где $f_1^1, f_1^2, f_1^3, f_2^1, f_2^2, f_2^3$ – функции компонент вектора $\mathbf{V}$ и их производных.

Положение точки M^t в деформированном состоянии оболочки можно представить в виде

$$\mathbf{R}^t = \mathbf{R}^{0t} + \mathbf{V}. \qquad (10)$$

Векторы локального базиса точки M^t записываются в виде

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_1^0 + \mathbf{V},_x = \mathbf{a}_1^0\left(1+tm_{31}+f_1^1\right)+\mathbf{a}_2^0\left(tm_{32}+f_1^2\right)+\mathbf{a}_3^0\left(tm_{33}+f_1^3\right);$$
$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_2^0 + \mathbf{V},_y = \mathbf{a}_1^0\left(tn_{31}+f_2^1\right)+\mathbf{a}_2^0\left(1+tn_{32}+f_2^2\right)+\mathbf{a}_3^0\left(tn_{33}+f_2^3\right);$$
$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_3^0 + \mathbf{V},_t = v,_t^1\,\mathbf{a}_1^0 + v,_t^2\,\mathbf{a}_2^0 + \left(v,_t^3+1\right)\mathbf{a}_3^0. \tag{11}$$

Деформации за j шагов нагружения определяются соотношениями механики сплошной среды[1]

$$\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{g}_{mn} - \mathbf{g}_{mn}^0\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{g}_m^0\cdot\mathbf{V},_n + \mathbf{g}_n^0\cdot\mathbf{V},_m + \mathbf{V},_m\cdot\mathbf{V},_n\right); \quad m = 1, 2, 3;\ n = 1, 2, 3. \tag{12}$$

Перемещение точки из положения M^t в положение M^{t*}определяется вектором в локальном базисе точки M^0

$$\mathbf{w} = w^1\mathbf{a}_1^0 + w^2\mathbf{a}_2^0 + w^3\mathbf{a}_3^0. \tag{13}$$

Производные вектора (13) с учетом (5) имеют вид

$$\mathbf{W},_x = \alpha_1^1\mathbf{a}_1^0 + \alpha_1^2\mathbf{a}_2^0 + \alpha_1^3\mathbf{a}_3^0;$$
$$\mathbf{w},_y = \alpha_2^1\mathbf{a}_1^0 + \alpha_2^2\mathbf{a}_2^0 + \alpha_2^3\mathbf{a}_3^0; \tag{14}$$
$$\mathbf{w},_t = w,_t^1\,\mathbf{a}_1^0 + w,_t^2\,\mathbf{a}_2^0 + w,_t^3\,\mathbf{a}_3^0.$$

где $\alpha_1^1, \alpha_1^2, \alpha_1^3, \alpha_2^1, \alpha_2^2, \alpha_2^3$ – функции компонент вектора и их производных.

Положение точки M^{t*} определяется радиус-вектором

$$\mathbf{R}^{t*} = \mathbf{R}^t + \mathbf{w}. \tag{15}$$

Базисные векторы точки M^{t*} выражаются в виде

$$\mathbf{g}_1^* = \mathbf{g}_1 + \mathbf{w},_x;$$
$$\mathbf{g}_2^* = \mathbf{g}_2 + \mathbf{w},_y; \tag{16}$$
$$\mathbf{g}_3^* = \mathbf{g}_3 + \mathbf{w},_t.$$

Приращения деформаций на $(j+1)$-м шаге нагружения определяются соотношениями [1]

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{g}_{ij}^* - \mathbf{g}_{ij}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{w},_j + \mathbf{g}_j\cdot\mathbf{w},_i + \mathbf{w},_j\cdot\mathbf{w},_i\right) = \Delta\varepsilon_{ij}^{\text{л}} + \Delta\varepsilon_{ij}^{\text{н}}; \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{17}$$

Линейная и нелинейная части приращений деформаций $\Delta\varepsilon_{ij}^{\text{л}}$ и $\Delta\varepsilon_{ij}^{\text{н}}$ с учетом (14), (11) может быть представлена в матричной форме

$$\underset{6\times1}{\left\{\Delta\varepsilon^{\text{л}}\right\}} = \underset{6\times3}{\left[L\right]}\underset{3\times1}{\left\{w\right\}};$$
$$\left\{\Delta\varepsilon^{\text{н}}\right\}^T = \left\{\mathbf{w},_\alpha\cdot\mathbf{w},_\beta\right\}, \tag{18}$$

где $\left\{\Delta\varepsilon^{\text{л}}\right\}^T = \left\{\Delta\varepsilon_{11}\ \Delta\varepsilon_{22}\ \Delta\varepsilon_{33}\ 2\Delta\varepsilon_{12}\ 2\Delta\varepsilon_{13}\ 2\Delta\varepsilon_{23}\right\}$;
$\left\{\mathbf{w},_\alpha\cdot\mathbf{w},_\beta\right\}^T = \left\{\mathbf{w},_1\cdot\mathbf{w},_1\quad \mathbf{w},_3\cdot\mathbf{w},_3\quad 2\mathbf{w},_1\cdot\mathbf{w},_3\right\}$;
$\left\{w\right\}^T = \left\{w^1\ \ w^2\ \ w^3\right\}$; [L] – матрица алгебраических и дифференциальных операторов.

3. Соотношения между деформациями и напряжениями. Компоненты тензора напряжений σ^{mn} связаны с компонентами тензора деформаций ε_{ij} законом Гука [1]

$$\sigma^{ij} = \lambda J_1(\varepsilon)\,g^{ij} + 2\mu g^{im}g^{jn}\varepsilon_{mn}, \tag{19}$$

где
$J_1(\varepsilon) = \varepsilon_{11}g^{11} + \varepsilon_{22}g^{22} + \varepsilon_{33}g^{33} + 2\varepsilon_{12}g^{12} + 2\varepsilon_{13}g^{13} + 2\varepsilon_{23}g^{23}$;
λ, μ – параметры Ламе.

На $(j+1)$-м шаге нагружения зависимости между компонентами тензора приращения деформаций и компонентами тензора приращения напряжений записываются аналогично (19)

$$\Delta\sigma^{ij} = \lambda J_1(\Delta\varepsilon)\,g^{ij} + 2\mu g^{im}g^{jn}\Delta\varepsilon_{mn}, \tag{20}$$

где

$$J_1(\Delta\varepsilon) = \Delta\varepsilon_{11}g^{11} + \Delta\varepsilon_{22}g^{22} + \Delta\varepsilon_{33}g^{33} + 2\Delta\varepsilon_{12}g^{12} + $$
$$+ 2\Delta\varepsilon_{13}g^{13} + 2\Delta\varepsilon_{23}g^{23}.$$

Соотношения (19) можно представить в матричном виде

$$\underset{6\times1}{\left\{\sigma\right\}} = \underset{6\times6}{\left[D\right]}\underset{6\times1}{\left\{\varepsilon\right\}}, \tag{21}$$

где $\left\{\varepsilon\right\}^T = \left\{\varepsilon_{11}\ \ \varepsilon_{22}\ \ \varepsilon_{33}\ \ 2\varepsilon_{12}\ \ 2\varepsilon_{13}\ \ 2\varepsilon_{23}\right\}$;
$\left\{\sigma\right\}^T = \left\{\sigma^{11}\ \ \sigma^{22}\ \sigma^{33}\ \ \sigma^{12}\ \sigma^{13}\ \sigma^{23}\right\}$;

[D] – матрица податливости материала.

Зависимости между приращениями напряжений и приращениями деформаций на $(j+1)$-м шаге нагружения имеют вид, аналогичный (21)

$$\underset{6\times1}{\left\{\Delta\sigma\right\}} = \underset{6\times6}{\left[D\right]}\underset{6\times1}{\left\{\Delta\varepsilon\right\}}, \tag{22}$$

где $\left\{\Delta\sigma\right\}^T = \left\{\Delta\sigma^{11}\ \ \Delta\sigma^{22}\ \Delta\sigma^{33}\ \ \Delta\sigma^{12}\ \ \Delta\sigma^{13}\ \ \Delta\sigma^{23}\right\}$.

4. ***Матрица деформирования конечного элемента на шаге нагружения***. В качестве дискретного объемного элемента выбран шестигранник с узлами *i, j, k, l* нижней грани элемента, параллельной срединной поверхности, и узлами *m, n, p, h* верхней грани элемента. Узловыми неизвестными принимаются приращения перемещений и приращения деформаций. Для выполнения численного интегрирования произвольный шестигранник отображается на куб с локальными координатами ξ, η, ζ, изменяющимися в пределах от –1 до 1. Глобальные координаты *x, y, t* шестигранника выражаются через локальные координаты куба ξ, η, ζ трилинейными соотношениями

$$x = \left\{\varphi(\xi,\eta,\zeta)\right\}^T\left\{x_y\right\};$$

$$y = \{\varphi(\xi,\eta,\zeta)\}^T \{y_y\}; \qquad (23)$$
$$t = \{\varphi(\xi,\eta,\zeta)\}^T \{t_y\},$$

где $\{x_y\}^T = \{x^i\ x^j\ x^k\ x^l\ x^m\ x^n\ x^p\ x^h\}$;

$$\{y_y\}^T = \{y^i\ y^j\ y^k\ y^l\ y^m\ y^n\ y^p\ y^h\};$$
$$\{t_y\}^T = \{t^i\ t^j\ t^k\ t^l\ t^m\ t^n\ t^p\ t^h\};$$

$$\underset{1\times 8}{\{\varphi(\xi,\eta,\zeta)\}}^T = \left\{\frac{1-\xi}{2}\frac{1-\eta}{2}\frac{1-\zeta}{2} \vdots \frac{1+\xi}{2}\frac{1-\eta}{2}\frac{1-\zeta}{2} \vdots \frac{1+\xi}{2}\frac{1+\eta}{2}\frac{1-\zeta}{2} \vdots \frac{1-\xi}{2}\frac{1-\eta}{2}\frac{1-\zeta}{2} \vdots \frac{1-\xi}{2}\frac{1-\eta}{2}\frac{1-\zeta}{2} \vdots \right.$$
$$\left. \vdots \frac{1+\xi}{2}\frac{1-\eta}{2}\frac{1+\zeta}{2} \vdots \frac{1+\xi}{2}\frac{1+\eta}{2}\frac{1+\zeta}{2} \vdots \frac{1-\xi}{2}\frac{1+\eta}{2}\frac{1+\zeta}{2}\right\}$$

– матрица-строка функций формы.

Дифференцированием (23) определяются производные глобальных координат в локальной системе $x,_\xi$, $x,_\eta$, $x,_\zeta$, $y,_\xi$, $y,_\eta$, $y,_\zeta$, $t,_\xi$, $t,_\eta$, $t,_\zeta$ и производные локальных координат в глобальной системе $\xi,_x$, $\xi,_t$, $\eta,_x$, $\eta,_y$, $\eta,_t$, $\zeta,_x$, $\zeta,_y$, $\zeta,_t$.

Компоненты вектора перемещения произвольной точки конечного элемента аппроксимируются через их узловые значения также трилинейными соотношениями

$$w^1 = \{\varphi(\xi,\eta,\zeta)\}^T \{w_y^1\};$$
$$w^2 = \{\varphi(\xi,\eta,\zeta)\}^T \{w_y^2\}; \qquad (24)$$
$$w^3 = \{\varphi(\xi,\eta,\zeta)\}^T \{w_y^3\},$$

где

$$\underset{1\times 8}{\{w_y^\omega\}}^T = \{w^{\omega i}\ w^{\omega j}\ w^{\omega k}\ w^{\omega l}\ w^{\omega m}\ w^{\omega n}\ w^{\omega p}\ w^{\omega h}\};$$

(ω = 1, 2, 3).

С использованием (24) можно сформировать матричные соотношения

$$\underset{3\times1}{\{w\}} = \underset{3\times24}{[A]}\underset{24\times1}{\{w_y\}};$$
$$\underset{6\times1}{\{\Delta\varepsilon\}} = \underset{6\times3}{[L]}\underset{3\times24}{[A]}\underset{24\times1}{\{w_y\}} = \underset{6\times24}{[B]}\underset{24\times1}{\{w_y\}}, \qquad (25)$$

где $$\underset{1\times24}{\{w_y\}}^T = \left\{\underset{1\times8}{\{w_y^1\}}^T\ \underset{1\times8}{\{w_y^2\}}^T\ \underset{1\times8}{\{w_y^2\}}^T\right\};$$

$$\underset{3\times24}{[A]} = \begin{bmatrix} \{\varphi\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{\varphi\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{\varphi\}^T \end{bmatrix}.$$

Используя трилинейную аппроксимацию, приращения деформаций во внутренней точке конечного элемента можно выразить через их узловые величины матричным выражением

$$\underset{6\times1}{\{\Delta\varepsilon\}} = \underset{6\times48}{[G]}\underset{48\times1}{\{\Delta\varepsilon_y\}}, \qquad (26)$$

где $\{\Delta\varepsilon_y\}^T = \{\Delta\varepsilon_{11}^i\ \Delta\varepsilon_{11}^j\ \dots\ \Delta\varepsilon_{23}^p\ \Delta\varepsilon_{23}^h\}$ – матрица-строка узловых приращений деформаций;

$$\underset{6\times48}{[G]} = \begin{bmatrix} \{\varphi\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{\varphi\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{\varphi\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{\varphi\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{\varphi\}^T & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{\varphi\}^T \end{bmatrix}.$$

В расчетах при учете геометрической нелинейности реализуется шаговая процедура нагружения. Функционал Лагранжа, выражающий равенство возможных и действительных работ внешних и внутренних сил на шаге нагружения, можно записать в виде

$$\Pi_L \equiv \int_V \left[\{\sigma\}^T + \frac{1}{2}\{\Delta\sigma\}^T\right]\left[\{\Delta\varepsilon^{л}\} + \{\Delta\varepsilon^{н}\}\right]dV - \int_S \{w\}^T\left[\{p\} + \frac{1}{2}\{\Delta p\}\right]dS = 0, \qquad (27)$$

где V – объем деформируемого тела; S – площадь поверхности с заданной внешней нагрузкой;

$$\{p\}^T = \{p_1\ p_2\ p_3\};$$
$$\{\Delta p\}^T = \{\Delta p_1\ \Delta p_2\ \Delta p_3\}$$

– векторы нагрузок после j-го и (j + 1)-го шагов соответственно.

Заменим выражение действительной работы внутренних сил в (27) разностью их возможной и дополнительной работ

$$\frac{1}{2}\{\Delta\sigma\}^T\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\sigma\}^T[L]\{w\} - \frac{1}{2}\Phi(\sigma) = \{\Delta\varepsilon\}^T[D][L]\{w\} - \frac{1}{2}\{\Delta\varepsilon^{л}\}^T[D]\{\Delta\varepsilon^{л}\}. \qquad (28)$$

С учетом (28) функционал (27) примет вид

$$\Pi_L \equiv \int_V \{\Delta\varepsilon^{л}\}^T[D][L]\{w\}\,dV + \int_V \{\sigma\}^T\{\Delta\varepsilon^{н}\}\,dV - \frac{1}{2}\int_V \{\Delta\varepsilon^{л}\}^T[D]\{\Delta\varepsilon^{л}\}\,dV -$$
$$-\int_S \{w\}^T\{p\}\,dS + \int_V \{\Delta\varepsilon^{л}\}^T\{\sigma\}dV = 0. \qquad (29)$$

Функционал (29) с учетом (26) и (25) для отдельного конечного элемента на шаге нагружения принимает вид

$$\Pi_L \equiv \underset{1\times48}{\left\{\Delta\varepsilon_y\right\}^T} \int_V \underset{48\times6}{\left[G\right]^T} \underset{6\times6}{\left[D\right]} \underset{6\times24}{\left[B\right]} dV \underset{24\times1}{\left\{w_y\right\}} + \underset{1\times24}{\left\{w_y\right\}^T} \underset{24\times24}{\left[K_{\text{н}}\right]} \underset{24\times1}{\left\{w_y\right\}} - \frac{1}{2} \underset{1\times48}{\left\{\Delta\varepsilon_y\right\}^T} \int_V \underset{48\times6}{\left[G\right]^T} \underset{6\times6}{\left[D\right]} \underset{6\times48}{\left[G\right]} dV \underset{48\times1}{\left\{\Delta\varepsilon_y\right\}} -$$

$$- \frac{1}{2} \underset{1\times24}{\left\{w_y\right\}^T} \int_S \underset{24\times3}{\left[A\right]^T} \underset{3\times1}{\left\{\Delta p\right\}} dS - \underset{1\times24}{\left\{w_y\right\}^T} \int_S \underset{24\times3}{\left[A\right]^T} \underset{3\times1}{\left\{p\right\}} dS + \underset{1\times24}{\left\{w_y\right\}^T} \int_V \underset{24\times6}{\left[B\right]^T} \underset{6\times1}{\left\{\sigma\right\}} dV = 0, \quad (30)$$

где $\underset{24\times24}{\left[K_{\text{н}}\right]}$ – матрица от нелинейной части приращения деформаций.

Минимизируя функционал (30) по узловым неизвестным $\left\{\Delta\varepsilon_y\right\}^T$ и $\left\{w_y\right\}^T$, получим систему уравнений

$$\frac{\partial \Pi_L}{\partial \left\{\Delta\varepsilon_y\right\}^T} = -\underset{48\times48}{\left[H\right]} \underset{48\times1}{\left\{\Delta\varepsilon_y\right\}} + \underset{48\times24}{\left[Q\right]} \underset{24\times1}{\left\{w_y\right\}} = 0;$$

$$\frac{\partial \Pi_L}{\partial \left\{w_y\right\}^T} = \underset{24\times48}{\left[Q\right]^T} \underset{48\times1}{\left\{\Delta\varepsilon_y\right\}} + \underset{24\times24}{\left[K_{\text{н}}\right]} \underset{24\times1}{\left\{w_y\right\}} + \underset{24\times1}{\left\{f\right\}} = 0, \quad (31)$$

где

$$\underset{48\times24}{\left[Q\right]} = \int_V \underset{48\times6}{\left[G\right]^T} \underset{6\times6}{\left[D\right]} \underset{6\times24}{\left[B\right]} dV;$$

$$\underset{48\times48}{\left[H\right]} = \int_V \underset{48\times6}{\left[G\right]^T} \underset{6\times6}{\left[D\right]} \underset{6\times48}{\left[G\right]} dV;$$

$$\underset{24\times1}{\left\{f\right\}} = \int_S \underset{24\times3}{\left[A\right]^T} \underset{3\times1}{\left\{\Delta p\right\}} dS - \int_V \underset{24\times6}{\left[B\right]^T} \left\{\sigma\right\} dV + \int_S \underset{24\times3}{\left[A\right]^T} \underset{3\times1}{\left\{p\right\}} dS.$$

Систему (31) можно представить в традиционной конечно-элементной форме

$$\underset{72\times72}{\left[k\right]} \underset{72\times1}{\left\{Z_y\right\}} = \underset{72\times1}{\left\{F\right\}}, \quad (32)$$

где $\underset{72\times72}{\left[k\right]} = \begin{bmatrix} -\underset{48\times48}{\left[H\right]} & \underset{48\times24}{\left[Q\right]} \\ \underset{24\times48}{\left[Q\right]^T} & \underset{24\times24}{\left[K_{н}\right]} \end{bmatrix}$ – матрица деформирования конечного элемента;

$\underset{1\times72}{\left\{Z_y\right\}^T} = \left\{ \underset{1\times48}{\left\{\Delta\varepsilon_y\right\}^T} \underset{1\times24}{\left\{w_y\right\}^T} \right\}$ – вектор узловых неизвестных конечного элемента;

$\underset{1\times72}{\left\{F\right\}^T} = \left\{ \underset{1\times48}{\left\{0\right\}^T} \underset{1\times24}{\left\{f\right\}^T} \right\}$ – вектор узловых усилий конечного элемента на шаге нагружения.

Для формирования матрицы деформирования всей конструкции используется традиционная процедура МКЭ [3].

Список литературы

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – т.1. – М.: Наука, 1976. – 536 с.

2. Гуреева Н.А. Восьмиугольный объемный конечный элемент в смешанной формулировке на основе функционала Рейсснера // Изв.вузов: Машиностроение. – М.: МГТУ, 2007. – №5. – С. 23-28.

3. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. – 344 с.

Фармацевтические науки

ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ МЕХАНИЗМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ЭМУЛЬСИЙ ФОСОФОЛИПИДАМИ

Пантюхин А.В., Пантюхина Е.В., Мухаметова К.Ф.

ГБОУ ВПО «Саратовский ГМУ им. В.И. Разумовского Минздравсоцразвития России», Саратов, e-mail: pav74@yandex.ru

Обоснованы и оптимизированы физико-химические методы исследования свойств поверхностно активных веществ сложного состава. Изучены основные поверхностно-активные свойства фосфолипидов из растительных объектов с целью их использования в лекарственных формах в качестве поверхностно-активных веществ. Разработан способ расчета насыщения поверхностно активным веществом поверхность раздела фаз в эмульсиях и способ расчета оптимального количества эмульгатора для получения эмульсий с заданным размером частиц.

Эмульсии как лекарственная форма удобна в применении и сочетает в себе много достоинств, среди которых наиболее важные это возможность корригирования и высокая биологическая доступность. Главным недостатком эмульсий является кинетическая неустойчивость и процессы деструкции в присутствие влаги. Одним из возможных вариантов повышения кинетической стабильность является повышение вязкости. Эмульсии с высокой вязкостью: линименты, мази, крема, эмульгели, суппозитории и т.п. выпускаются фармацевтической промышленность и зарекомендовали себя как лекарственные средства с высокими потребительскими свойствами и биологической доступностью. Что касается эмульсий с низкой вязкостью, предназначенные для внутреннего, перорального и др. видов применения, то в данном случае можно отметить об ограниченном ассортименте, состоящим из нескольких наименований. Основная проблема создания таких лекарственных форм является отсутствие научно обоснованных подходов к разработке гетерогенных систем, в т.ч. эмульсий [3, 5].

На первом этапе разработке эмульсий необходимо сформировать цель исследований на основании технического задания и анализа материала. На этом основании делается вывод о виде лекарственной формы и требованиям к ним: эмульсия для наружного или внутреннего применения, парентерального питания, дозировки препарата. При этом учитывается дозировка лекарственных веществ, их физико-химические