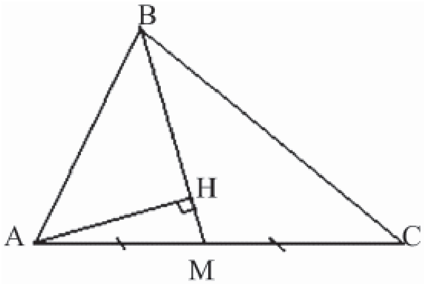
C4. Площадь ΔABC равна $60\sqrt{2}$. *Н*айдите длину *AC,* если длина *AB р*авна 11 и они больше половины длины *AC*, а длина медианы *BM* равна 10.



Пусть *H* проекция точки *A* на прямую *BM* По условию *AB* > *AM*, значит ∠*AMB*∠*ABM*, а потому ∠*ABM* является острым. Из этого следует, что точка Н лежит на луче *BM*, а не на его дополнении. Так как *M* – середина *AC*, то

$$S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} = 30\sqrt{2}\ ;$$

$$S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} AH \cdot BM;$$

$$AH = \frac{2S_{\Delta ABM}}{BM} = \frac{60\sqrt{2}}{10} = 6\sqrt{2}.$$

Из ΔABH по теореме Пифагора

$$BP = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{121 - 72} = 7;$$

$$MH = BM - BH = 10 - 7 = 3.$$

Из ΔAMH ($\angle H = 90^{\circ}$) по теореме Пифагора

$$AM = \sqrt{AH^2 + MH^2} = \sqrt{72 + 9} = 9;$$

$$AC = 2AM = 29 = 18.$$

О т в е т : 18.

C5. При каких значениях *p* уравнение

$$5\cos 2x + \frac{2p}{\sin x} = -29$$

имеет решение?

Решение:

$$5\cos 2x + \frac{2p}{\sin x} = -29/\sin x \text{ ОДЗ } \sin x \neq 0;$$

$$5\cos 2x \cdot \sin x + 2p = -29\sin x;$$

$$5\left(1 - 2\sin^2 x\right)\sin x + 2p = -29\sin x;$$

$$p = 5\sin^3 x - 17\sin x.$$

Полученное уравнение будет иметь корни тогда и только тогда, когда *p* будет принимать значения из области значений функции

$$y(x) = 5\sin^3 x - 17\sin x.$$

Обозначим $\sin x = t,$ с учётом ОДЗ $t \in [-1; 0) \cup (0; 1]$.

Рассмотрим функцию $f(t) = 5t^3 - 17t,$ где $t \in [-1;\ 0) \cup (0;\ 1]$; т.к. $f(-t) = -f(t),$ то функция нечётна. Поэтому, достаточно найти *E*(*f*)Е*,* для $t \in [0;\ 1)$.

$$f(t) = 5t^3 - 17t.$$

$$f'(t) = 5t^3 - 17t,$$

для $t \in [0;\ 1)$, справедливо неравенство $f'(t) < 0$, т.е. $f(t)$ убывает и непрерывна на [0; 1), то $f(t) = -12$ – минимальное значение, а $f(0) = 0$ – максимальное, следовательно $t \in [0; 1)$, $E(f) = [-12; 0)$, т.к. $f(t)$ – нечётная, то для $t \in [-1;\ 0)$ $E(f) = (0;\ 12)$ значит $p \in [-12;\ 0) \cup (0;\ 12]$.

О т в е т : $p \in [-12;\ 0) \cup (0;\ 12]$.

При подготовке к ЕГЭ необходимо обратить внимание на оформление работы и чёткость ответа.

Список литературы

1. Кушнир И. Уравнения. Задачи и решения. – Киев: Астарта, 1996.

2. Шарыгин И.Ф. Геометрия (планиметрия) Задачник 9-11 классы. – М.: Дрофа, 2001.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ В ЗАДАНИЯХ С6 ЕГЭ

[1]Салий В.П.*,* [2]Тимохин В.М.

[1]СОШ №40, Новороссийск;
[2]Государственный морской университет имени адмирала Ф.Ф. Ушакова», Новороссийск,
e-mail: t.v.m@inbox.ru

Одним из основных отличий заданий уровня С6 от остальных заданий ЕГЭ является их явно выраженный нестандартный характер, а сведения, необходимые для решения этих заданий могут относиться к самым различным разделам школьного курса, построение решения может потребовать нетривиальных идей и методов. Умение доказывать, умение рассуждать, которому можно научиться, изучая математику, даст возможность потратить на рутинную работу значительно меньше сил и времени, чем предполагают составители заданий ЕГЭ. Чрезвычайно полезна информация, связанная с делимостью чисел, свойствами чисел и операциями над ними, методами рационального счёта. Здесь предлагаются задания, которые содержат теоретический материал не входящий в школьный курс математики (для тех, кто интересуется математикой), поэтому для подготовки учащихся предлагаем следующую группу задач. Например*:*

1. Доказать, что 15892 – 1 – составное число.

Доказательство:

1589 – нечётное число, то его квадрат тоже нечётное число, значит $1589^2 - 1$ чётное, т.е. делится на 2, значит оно составное.

2. Является ли число $648732^{38} - 3$ простым?

Доказательство:

Сумма цифр числа 648732 равна

$$6 + 4 + 8 + 7 + 3 + 2 = 30$$

делится на 3, значит 648732 делится на 3, и $648732^{38} - 3$ делится на 3 (каждое слагаемое делится на 3) и $648732^{38} - 3$ является составным.

3. Доказать, что

$$1113^{11} + 3335^{33} + 5557^{55} + 7779^{77}$$

является составным числом.

Доказательство:

Все основания степеней нечётные числа, а любая степень нечётного числа нечётна, а так как слагаемых четыре, то их сумма чётное число, значит делится на 2, т.е. данная сумма равна чётному составному числу, т.к. она больше 2, а 2 – простое число.

4. Доказать, что число $333^{555} + 555^{333}$ делится нацело на 37.

Доказательство:

$333^{555} + 555^{333} = (111\cdot 3)^{555} + (111\cdot 5)^{333}$, данное выражение делится на 111, а 111 делится на 37, значит данное число делится на 37.

5. Доказать, что если x и y – целые числа такие, что $3x + 8y$ делится нацело на 17, то число нацело на 17, то число $35x + 65y$ так же делится нацело на 17.

Доказательство:

$$35x + 65y = 6(3x + 8y) + 17x + 17y,$$

каждое слагаемое делится нацело на 17, значит и сумма делится на 17.

6. Если между цифрами двузначного числа x вписать это же число, то полученное трёхзначное число будет в 66 раз больше первоначального двузначного числа. Найдите число x.

Решение:

По условию задачи $x = \overline{ab}$.

$$\overline{a \cdot ab \cdot b} = 66\overline{ab}\ ;\ \ \overline{ab} = 10a + b;$$

$$\overline{a \cdot ab \cdot b} = 1000a + 100a + 10b + b;$$

$$1100a + 11b = 66(10a + b);$$

$440a = 55b$, $8a = b$, т.к. a *и* b цифры, то при $a = 1$ $(a \neq 0$, т.к. в двузначном числе стоит на первом месте), $b = 8$. Получим число 18, если $a = 2$, то $b = 16$ – не является искомой цифрой.

Следовательно, $x = 18$.

7. Найдите сумму остатков, получающихся при делении числа 45180546371137 на 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25.

Решение:

Дополнительные теоретические сведения:

1. Произвольное натуральное число $\overline{a_n \ldots a_0}$ его последняя цифра a_0 всегда имеют одинаковый остаток при делении на 2, 5 и 10.

2. Произвольное натуральное число $\overline{a_n \ldots a_0}$ и число $\overline{a_1 a_0}$,образованное его двумя последними цифрами, всегда имеют одинаковый остаток при делении на 4 и 25.

3. Произвольное натуральное число и его сумма цифр всегда имеют одинаковый остаток при делении на 3 и 9.

при делении на $2\cdot 7 = 2\cdot 3 + 12$, остаток 1;

при делении на 5 $7 = 5 + 2$, остаток 2;

при делении на $10\cdot 7 = 0\cdot 10 + 7$, остаток 7;

при делении на $4\cdot 37 = 9\cdot 4 + 1$, остаток 1;

при делении на $25\cdot 37 = 25\cdot 1 + 12$, остаток 12;

при делении на 3 сумма цифр данного числа равна 55 $55 = 18\cdot 3 + 1$, остаток 1;

при делении на $955 = 9\cdot 6 + 1$, остаток 1.

Сумма остатков равна 25.

8. Простым или составным является число

$$111 + 222 + 333 + 444 + 555 + 666?$$

Решение:

1^{11} оканчивается цифрой 1,

$2^{22} = 16^{5}\cdot 4$ – цифрой 4,

$3^{33} = 81^{8}\cdot 3$– цифрой 3,

$4^{44} = 16^{22}$– цифрой 6,

5^{55}– цифрой 5,

6^{66} – цифрой 6,

значит их сумма последней будет иметь ту же цифру, что и сумма $1 + 4 + 3 + 6 + 5 + 6 = 25$, т.е. цифрой 5, значит число делится на 5 и является составным.

9. Остатки от деления натурального числа n на 8 и на 9 равны соответственно 5 и 6. Найти остаток от деления числа n на 72.

Решение:

$$n = 8\cdot k + 5,\ k \in z,\ 8 - 5 = 3,$$

$$n = 9\cdot m + 6,\ m \in z,\ 9 - 6 = 3,$$

значит число $n + 3$ делится нацело на 9 и на 8, а они (8 и 9) взаимно простые числа, то $n + 3$ делится и на 72, значит $n + 3 = 72l,\ l \in z,$ $n = 72l - 3$, следовательно искомый остаток равен $72 - 3 = 69$.

О т в е т : 69.

10. В пакеты вместимостью 2, 3 и 9 кг требуется пересыпать 107 кг сухофруктов. Какое наименьшее число пакетов потребуется для этого?

Решение:

107/9 = 11 пакетов (8 кг останется); 8/3 = 2 пакета (2 кг останется); 2/2 = 1 пакет. Всего 14 пакетов.

Если же взять хотя бы на один пакет вместимостью 9 кг меньше, то для того, чтобы пересыпать оставшиеся 17 кг понадобится не меньше 6 пакетов, так что общее число пакетов будет больше 14.

О т в е т : 14.

11. Найдите все пары натуральных чисел m и n, удовлетворяющих уравнению

$$2^m - 3^n = 1.$$

Решение:

$$2^m - 3^n = 1 \text{ или } 2^m = 3^n + 1.$$

Здесь 2^m – чётное число; $3^n + 1$ – тоже чётное число. Перебором получаем, что при $m = 1$; $2^1 = 3^n + 1$ ни при каких $n \in N$ это равенство не выполняется; при $m = 2$ $2^2 = 4$, $3^n + 1 = 4$ при $n = 1$; $2^2 = 3^1 + 1$ – верно, а при $m > 2$; 2^m делится на 8 без остатка, 3^n при делении на 8 даёт остатки 1 и 3. Значит $3^n + 1$ даёт остатки 2 и 4. Остатки у левой и правой частей должны быть равны. Отсюда $m = 2$ и $n = 1$.

Ответ: $m = 2$, $n = 1$

12. *Докажите, что* $p^2 - 1$ нацело на 24, если p – простое число, больше 3.

Решение:

Число $24 = 8 \cdot 3$, где 8 и 3 взаимно простые числа. Докажем, что данное число делится и на 3 и на 8 без остатка. Преобразуем это число $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$.

Рассмотрим три последовательных натуральных числа $p - 1$, p, $p + 1$ где $p > 3$ простое число. Так как это подряд идущие целые числа, то одно из них делится на 3, но это не число p ($p > 3$ простое), значит на три делится либо $p - 1$ либо $p + 1$, следовательно, $p^2 - 1$, делится на 3.

Так как $p > 3$ (простое число, оно нечётное), то $p - 1$ и $p + 1$ два подряд идущих чётных числа. Тогда одно из них делится по крайней мере на 2, а второе по крайней мере на 4, тогда произведение $(p - 1)(p + 1)$ делится на 8. Из всего сказанного делаем вывод: если $p^2 - 1$ делится и на 3 и на 8, то оно делится и на 24.

13. Грузовики для перевозки партии телевизоров должны быть загружены до отказа. Если коробки с телевизорами уложить так, чтобы в каждом грузовике поместилось на 2 коробки больше, то грузовиков понадобится на 2 меньше. Сколько грузовиков понадобится?

Решение:

Число 323 нечётно, следовательно, и число грузовиков и количество коробок, поместившихся в них нечётно. Если искомое число грузовиков равно x, то 323 делится на x и на $x + 2$ – два соседних и нечётных делителя. Ни по одному из известных признаков делимости делители 323 найти не получится. *Поэтому перебираем простые делители, начиная* с *7:*

$x = 7$, $323 = 280 - 43$, 43 не делится на 7, значит, 323 не делится на 7;

$x = 11$, $323 = 330 - 7$, 77 не делится на 11, значит, 323 не делится на 11;

$x = 13$, $323 = 260 + 63$, 63 не делится на 13, значит, 323 не делится на 13;

$x = 17$. $323 = 340 - 17$, 340 делится на 17 и 17 делится на 17, значит. 323 делится на 17.

$323 = 17 \cdot 19$, где $19 - 17 = 2$. Поэтому $x = 17$.

Ответ: $x = 17$.

14. Найдите все пары натуральных чисел a и b, что если к десятичной записи числа a приписать справа десятичную запись числа b, то получится число, большее произведения чисел a и в на 42.

Решение:

Пусть n – количество цифр в десятичной записи числа b, *тогда приписывая* к десятичной записи числа a справа десятичную запись числа b, *получаем число, равное* $10^n \cdot a + b$ и это число равно $ab + 42$, *т.е.*

$$10^n \cdot a + b = ab + 42; \quad 10^n \cdot a - ab = 42 - b;$$

$$a(10^n - b) = 42 - b \qquad (1)$$

т.к. $b < 10^n$, то $a(10^n - b) > 0$, поэтому $42 - b \geq 0$, $b \leq 42$. Значит, десятичная запись числа b состоит из двух или одной цифры: $n = 1$ или $n = 2$. При $n = 2$ равенство (1) имеет вид

$$a(100 - b) = 42 - b, \ 0 < b \leq 42,$$

то

$$42 - b = < 42, \ 100 - b > 58$$

и равенство $a(100 - b) = 42 - b$ не выполняется ни при каком натуральном a. При $n = 1$ равенство (1) принимает вид $(10 - b) = 42 - b$. Положим, что b – однозначное число ($n = 1$).

Методом перебора находим:

$b = 1$, $a(10 - 1) = 42 - 1$, $9a = 41$, $a \notin N$.
$b = 2$, $a(10 - 2) = 42 - 2$, $8a = 40$, $a = 5$.
$b = 3$, $a(10 - 3) = 42 - 3$, $7a = 39$, $a \notin N$.
$b = 4$, $a(10 - 4) = 42 - 4$, $6a = 38$, $a \notin N$.
$b = 6$, $a(10 - 6) = 42 - 6$, $4a = 36$, $a = 9$.
$b = 7$, $a(10 - 7) = 42 - 7$, $3a = 35$, $a \notin N$
$b = 8$, $a(10 - 8) = 42 - 8$, $2a = 34$, $a = 17$.
$b = 9$, $a(10 - 9) = 42 - 9$, $a = 33$.

Ответ: $b = 2$; $a = 5$;
$b = 6$; $a = 9$;
$b = 8$, $a = 17$;
$b = 9$; $a = 33$.

Список литературы

1. Боревский Л.Я. Курс математики 2000. Алгебра 1. – М.: МедиаХауз, 2000.

2. Математика. ЕГЭ-2011 / Г.В. Дорофеев, Е.А. Седова, С.А. Шестаков, С.В. Пчелинцев. – М.: ЭКСМО, 2010.

3. Васильева И.В. Теория чисел в школьном курсе математики. – Краснодар, 2011.

РАБОТА С ОДАРЁННЫМИ ДЕТЬМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Тимохина А.К.

СОШ №40, Новороссийск, e-mail: t.v.m@inbox.ru

Не секрет, каждому педагогу хочется, чтобы именно его ученики полюбили предмет, с интересом занимались на уроках и во внеурочное время, занимали призовые места на олимпиадах и конкурсах, успешно сдавали ЕГЭ и ГИА. И всегда есть мучительные раздумья – а как этого достичь? Точного рецепта не знает никто. Для достижения положительных результатов в своей работе сначала ставлю цель – создать условия для оптимального развития способностей учащихся через современные инновационные технологии, то есть, помочь ученику в процессе социализации и развитии творческих способностей, где главными задачами считаю следующие:

1. Выбор методов и приемов обучения, способствующих развитию самостоятельности мышления, инициативности и творчества.

2. Предоставление возможности учащимся развивать способности в исследовательской деятельности со сверстниками через самостоятельную работу.