Об эффективности управления силовыми нагрузками по частицам обрабатываемого продукта в ЭММА можно судить по отношению мощности P_1, передаваемой от электродвигателя к «слою скольжения» [1, 2] ферромагнитных измельчающих элементов, к мощности P_2, затраченной на управление ЭММА,

$$P_1 = Mn; \quad (1)$$

$$P_2 = U_y I_y; \quad (2)$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{Mn}{U_y I_y}, \quad (3)$$

где M – момент сопротивления заполнителя рабочего объема устройства; n – частота вращения «слоя скольжения» ЭММА; U_y – напряжение на обмотке управления; I_y – ток управления ЭММА.

В результате исследований [1, 2] установлено, что отношение $\frac{P_1}{P_2}$ может достигать значений порядка $10...10^3$, т.е. ЭММА можно рассматривать как усилитель мощности, позволяющий передавать значительную по величине энергию к частицам обрабатываемого продукта при небольших значениях тока (0,1...0,8 А), управляющего магнитным полем.

При проектировании ЭММА для создания в рабочем объеме требуемых технологией переработки продукта энергетических и силовых характеристик магнитного поля необходим тщательный подбор материалов магнитопровода и электротехнический расчет его конструктивных параметров [1, 2, 4].

На основании исследований [1, 2, 3, 4] установлено, что основным условием регулирования силовыми и энергетическими взаимодействиями между магнитным полем, рабочими элементами и частицами обрабатываемого материала в ЭММА является создание пропорциональности между величиной индукции магнитного поля (или магнитного потока) в объемах обработки продукта и величиной намагничивающего тока в обмотках управления аппарата (т.е. обеспечение условий работы ЭММА при ненасыщенном магнитном состоянии материалов его магнитопровода).

Возможность тонкого и надежного регулирования (с небольшими затратами мощности) позволяет подчинить работу устройства технологическим требованиям обработки продукта и получить готовое изделие высокого качества [5].

Список литературы

1. Беззубцева М.М., Волков В.С. Теоретические основы электромагнитной механоактивации. – СПб.: Изд-во СПбГАУ, 2011. – 250 с.

2. Беззубцева М.М. Электромагнитные измельчители. Теория и технологические возможности: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – СПб.: СПбГАУ, 1997. – 24 с.

3. Беззубцева М.М., Пасынков В.Е., Родюков Ф.Ф. Теоретическое исследование электромагнитного способа измельчения материалов. – СПб.: СПбТИХП, 1993. – 49 с.

4. Беззубцева М.М., Волков В.С. Теоретические исследования электромагнитного способа механоактивации // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2012. – №5.

5. Беззубцева М.М. Энергоэффективный способ электромагнитной активации // Международный журнал экспериментального образования. – 2012. – №5.

Физико-математические науки

МЕТОД ИНВАРИАНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Итигилов Г.Б., Ширапов Д.Ш.

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ, e-mail: shir@esstu.ru

Описан «Метод инвариантных преобразований», позволяющий получить общие аналитические выражения для поперечных компонент электромагнитного поля в закрытой гиротропной области с ортогональной криволинейной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании.

Распространение электромагнитных волн (ЭМВ) в намагниченной ферритовой (гиротропной) среде характеризуется тем, что фазовая скорость, затухание и поляризация распространяющейся волны зависят от величины напряженности внешнего магнитного поля и его направления относительно направления распространения волны. Вследствие этого условия распространение волн в направляющих системах с гиротропным заполнением можно сознательно изменять в широких пределах, изменяя величину и направление магнитного поля [1].

Для исследования условий распространения ЭМВ в регулярной гиротропной ограниченной области с ортогональной криволинейной формой поперечного сечения, намагниченной вдоль одной из координатных осей, необходимы инвариантные преобразования на основе тензорного исчисления (метод инвариантных преобразований – МИП). Удобство применения МИП для математического анализа ограниченных областей с обобщенно-ортогональной формой поперечного сечения является то, что метод обладает свойством инвариантности относительно преобразования координат.

В общем случае рассматривается намагничивание феррита вдоль одной из трех координатных осей [2]. При этом рассматривают три случая кривизны поперечных координат:

1) линейность по обеим координатным осям;
2) кривизна по одной из координатных осей;
3) кривизна по обеим координатным осям.

Первому случаю соответствует прямоугольная система координат, второму – цилиндрическая, третьему – эллиптическая.

Целью статьи является описание «Метода инвариантных преобразований».

1. Характеристики ортогональных систем координат

Определим характеристики эллиптической системы координат: коэффициенты Ламэ, символы Кристоффеля и метрику.

Коэффициенты Ламэ определяем по формуле [3]:

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2}, \qquad (1)$$

где $u_1 = \xi, u_2 = \phi, u_3 = z$ – эллиптические координаты.

Тогда из (1) имеем:

$$h_1 = h_2 = ed; \quad h_3 = 1, \qquad (2)$$

где $d = \sqrt{\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\phi}$; e – фокусное расстояние.

Символы Кристоффеля определяем из [4]. После преобразований:

$$\begin{cases} \Gamma^1_{ij} = \dfrac{1}{2d^2}\begin{bmatrix} \mathrm{sh}2\xi & \sin 2\phi & 0 \\ \sin 2\phi & -\mathrm{sh}2\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \Gamma^2_{ij} = \dfrac{1}{h_2}\begin{bmatrix} -\sin 2\phi & \mathrm{sh}2\xi & 0 \\ \mathrm{sh}2\xi & \sin 2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{cases} \qquad (3)$$

Тогда метрика будет равна:

$$ds^2 = (h_1 du_1)^2 + (h_2 du_2)^2 + (h_3 du_3)^2 = e^2 d^2 d\xi^2 + e^2 d^2 d\phi^2 + dz^2. \qquad (4)$$

Аналогично для цилиндрической системы координат ($u_1 = r$, $u_2 = \varphi$, $u_3 = z$) коэффициенты Ламэ определим из [3], а символы Кристоффеля из [4]. После преобразований:

$$\begin{cases} h_1 = h_3 = 1, \ h_2 = r; \\ \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^1_{12} = 0, \quad \Gamma^2_{21} = \dfrac{1}{r}. \end{cases} \qquad (5)$$

Метрика будет равна:

$$ds^2 = (h_1 du_1)^2 + (h_2 du_2)^2 + (h_3 du_3)^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2. \qquad (6)$$

Для декартовой системы координат ($u_1 = x$, $u_2 = y$, $u_3 = z$):

$$\begin{gathered} h_1 = h_2 = h_3 = 1, \\ \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{21} = 0. \end{gathered} \qquad (7)$$

Метрика будет равна:

$$ds^2 = (h_1 du_1)^2 + (h_2 du_2)^2 + (h_3 du_3)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \qquad (8)$$

2. Поперечные компоненты электромагнитного поля

При рассмотрении процессов, гармонических во времени (зависимость от времени примем в виде e^{jwt}), уравнения Максвелла без наведенных токов и зарядов имеют вид [1]:

$$\begin{cases} rot\overline{H} = jw\overline{E}; \quad rot\overline{E} = -jw\overline{B}; \\ div\overline{D} = 0; \quad div\overline{B} = 0, \end{cases} \qquad (9)$$

где $\overline{E}, \overline{H}$ – соответственно напряженности электрического и магнитного полей; $\overline{D}, \overline{B}$ – соответственно электрическая и магнитная индукции; j – мнимая единица; w – циклическая частота.

Система (9) дополняется материальными уравнениями среды:

$$\overline{D} = \varepsilon \overline{E}; \quad \overline{B} = \|\mu\| \overline{H}, \qquad (10)$$

где ε – абсолютная диэлектрическая проницаемость, а $\|\mu\|$ – тензор магнитной проницаемости.

При произвольном намагничивании, когда внешнее намагничивающее постоянное поле имеет составляющие по всем трем координатным осям, тензор магнитной проницаемости феррита, как следует из [5], имеет вид:

$$\mu_{ik} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & jk & jl \\ -jk & \mu_{22} & jm \\ -jl & -jm & \mu_{33} \end{bmatrix}, \qquad (11)$$

где μ_{11}, μ_{22}, μ_{33}, k, l, m – компоненты тензора.

Из системы (9), разложив $rot\,\overline{H}$ и $rot\,\overline{E}$ по осям, после подстановок и преобразований получим поперечные компоненты электромагнитного поля (ЭМП) для гиротропной области с криволинейной ортогональной формой поперечного сечения:

$$\begin{cases} E_1 = -\dfrac{j\gamma a^2}{a^2b^2 - w^4\varepsilon^2k^2}\left\{\begin{matrix}\nabla_1 E_3 + \left(\dfrac{w\mu_{22}}{\gamma}\dfrac{p^2}{a^2}\nabla_2 + wm\right)H_3 - \\ -\dfrac{jw^2\varepsilon k}{a^2}\left[\nabla_2 E_3 - \left(\dfrac{\gamma}{w\varepsilon}\nabla_1 + wl\right)H_3\right]\end{matrix}\right\}, \\ E_2 = -\dfrac{j\gamma b^2}{a^2b^2 - w^4\varepsilon^2k^2}\left\{\begin{matrix}\nabla_2 E_3 - \left(\dfrac{w\mu_{11}}{\gamma}\dfrac{g^2}{b^2}\nabla_1 + wl\right)H_3 + \\ +\dfrac{jw^2\varepsilon k}{b^2}\left[\nabla_1 E_3 + \left(\dfrac{\gamma}{w\varepsilon}\nabla_2 + wm\right)H_3\right]\end{matrix}\right\}, \\ H_1 = \dfrac{j\gamma b^2}{a^2b^2 - w^4\varepsilon^2k^2}\left\{\begin{matrix}\dfrac{w\varepsilon}{\gamma}\nabla_2 E_3 - \left(\nabla_1 + \dfrac{w^2\varepsilon l}{\gamma}\right)H_3 + \\ +\dfrac{jw^2k\varepsilon}{b^2}\left[\dfrac{w\varepsilon}{\gamma}\nabla_1 E_3 + \left(\nabla_2 + \dfrac{w^2\varepsilon m}{\gamma}\right)H_3\right]\end{matrix}\right\}, \\ H_2 = -\dfrac{j\gamma a^2}{a^2b^2 - w^4\varepsilon^2k^2}\left\{\begin{matrix}\dfrac{w\varepsilon}{\gamma}\nabla_1 E_3 + \left(\nabla_2 + \dfrac{w^2\varepsilon m}{\gamma}\right)H_3 - \\ -\dfrac{jw^2k\varepsilon}{a^2}\left[\dfrac{w\varepsilon}{\gamma}\nabla_2 E_3 - \left(\nabla_1 + \dfrac{w^2\varepsilon l}{\gamma}\right)H_3\right]\end{matrix}\right\}, \end{cases} \quad (12)$$

где
$$a^2 = w^2\mu_{11}\varepsilon - \gamma^2;$$
$$b^2 = w^2\mu_{22}\varepsilon - \gamma^2;$$
$$g^2 = w^2\varepsilon\frac{\mu_{11}\mu_{22} - k^2}{\mu_{11}} - \gamma^2;$$
$$p^2 = w^2\varepsilon\frac{\mu_{11}\mu_{22} - k^2}{\mu_{22}} - \gamma^2;$$
$$\nabla_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1};$$
$$\nabla_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2};$$
– циклическая частота; γ – постоянная распространения.

Выражение (12) описывает поперечные компоненты ЭМП в ограниченной гиротропной области с ортогональной формой поперечного сечения при произвольном намагничивании.

При продольном намагничивании тензор магнитной проницаемости феррита имеет вид [5]:

$$\overleftrightarrow{\mu} = \begin{bmatrix} \mu & jk & 0 \\ -jk & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{bmatrix} \quad (13)$$

где
$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \frac{w_0 w_M}{w_0^2 - w^2};$$
$$\frac{k}{\mu_0} = \frac{w w_M}{w_0^2 - w^2};$$
$$w_M = \mu_0 Y M_0;$$
$$Y = 1{,}76\cdot 10^{11}\ \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}$$
– гиромагнитное отношение для спина; $w_0 = \mu_0 Y H_0$ – частота ферромагнитного резонанса; M_0 – намагниченность насыщения феррита; H_0 – внешнее намагничивающее магнитное поле.

Из формулы (12), учитывая (13), получим общие формулы поперечных компонент ЭМП в ограниченной гиротропной области с криволинейной ортогональной формой поперечного сечения при продольном намагничивании:

$$\begin{cases} E_1 = -\dfrac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2}\left\{\nabla_1 E_3 + \dfrac{w\mu}{\gamma}\dfrac{c^2}{a^2}\nabla_2 H_3 - \dfrac{jw^2\varepsilon k}{a^2}\left[\nabla_2 E_3 - \dfrac{\gamma}{w\varepsilon}\nabla_1 H_3\right]\right\}, \\ E_2 = -\dfrac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2}\left\{\nabla_2 E_3 - \dfrac{w\mu}{\gamma}\dfrac{c^2}{a^2}\nabla_1 H_3 + \dfrac{jw^2\varepsilon k}{a^2}\left[\nabla_1 E_3 + \dfrac{\gamma}{w\varepsilon}\nabla_2 H_3\right]\right\}, \\ H_1 = \dfrac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2}\left\{\dfrac{w\varepsilon}{\gamma}\nabla_2 E_3 - \nabla_1 H_3 + \dfrac{jw^2\varepsilon k}{a^2}\left[\dfrac{w\varepsilon}{\gamma}\nabla_1 E_3 + \nabla_2 H_3\right]\right\}, \\ H_2 = -\dfrac{j\gamma a^2}{g_+^2 g_-^2}\left\{\dfrac{w\varepsilon}{\gamma}\nabla_1 E_3 + \nabla_2 H_3 - \dfrac{jw^2\varepsilon k}{a^2}\left[\dfrac{w\varepsilon}{\gamma}\nabla_2 E_3 - \nabla_1 H_3\right]\right\}, \end{cases} \quad (14)$$

где

$$a^2 = w^2\mu_{11}\varepsilon - \gamma^2 = w^2\mu\varepsilon - \gamma^2;$$

$$g_{\pm}^2 = w^2\varepsilon\mu \pm w^2\varepsilon k - \gamma^2;$$

$$c^2 = w^2\varepsilon\frac{\mu^2 - k^2}{\mu} - \gamma^2.$$

Далее из (14) можно легко получить поперечные компоненты ЭМП для конкретных форм ограниченных областей. При этом форма поперечного сечения ограниченной области определяется выбором системы координат. При анализе ЭМВ в ограниченных областях с эллиптической, круглой и прямоугольной формами поперечного сечения, используются эллиптическая, цилиндрическая и декартовая системы координат, соответственно.

Таким образом, для определения аналитических формул поперечных компонент электромагнитного поля:

а) для гиротропной эллиптической области в (14) необходимо подставить (2);

б) для гиротропной цилиндрической области при продольном намагничивании в (14) необходимо подставить (5);

в) для гиротропной прямоугольной области при продольном намагничивании в (14) нужно подставить (7).

Вывод. Описан «Метод инвариантных преобразований», позволяющий получить общие аналитические выражения (14) поперечных компонент ЭМВ в гиротропной ограниченной области криволинейной формой при произвольном намагничивании.

Список литературы

1. Микаэлян А.Л. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 664 с.

2. Неганов В.А., Нефедов Е.И., Яровой Г.П. Современные методы проектирования линий передач и резонаторов сверх- и крайневысоких частот. – М.: Педагогика-Пресс, 1998. – 328 с.

3. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1967. – 780 с.

4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1973. – 831 с.

5. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. – М.: Физматлит, 1994. – 464 с.

6. Виприцкий Д.Д. Открытые и экранированные направляющие структуры с продольно намагниченными ферритовыми слоями: дис. ... канд. техн. наук. – Нижний Новгород, 2007. – 177 с.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ: НЕРАЗДЕЛЁННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ВТОРОГО ТИПА

Митрохин С.И.

НИВЦ МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, e-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

Рассмотрим следующую краевую задачу для дифференциального оператора Штурма-Лиувилля:

$$-y''(x) + q(x)\cdot y(x) = \lambda a^2 \cdot y(x), \quad 0 \le x \le \pi, \quad a > 0 \tag{1}$$

с неразделёнными граничными условиями второго типа:

$$y'(0) + a_{10}\cdot y'(\pi) + a_{11}\cdot y(0) + a_{12}\cdot y(\pi) = 0; \quad y(0) + a_{24}\cdot y(\pi) = 0, \tag{2}$$

где λ – спектральный параметр,

$$q(x) \in L_1[0;\pi],$$

$$a_{1k} \in C\,(k = 0,1,2),$$

$$a_{24} \in C.$$

Теорема 1. Дифференциальный оператор (1)-(2) в случае $a_{24} = -a_{10}$, $a_{10} \ne \pm 1$ собственных значений не имеет.

Теорема 2. Пусть

$$z_{1,2} = \frac{-1 - a_{10}\cdot a_{24} \pm \sqrt{D}}{a_{10} + a_{24}}, \quad a_{10} + a_{24} \ne 0 \tag{3}$$

Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)-(2) в случае $D = \left(a_{10}^2 - 1\right)\cdot\left(a_{24}^2 - 1\right) > 0$ имеет следующий вид:

$$s_{k,m} = \frac{2}{a}\cdot K_{1m} + \frac{d_{1k,m}}{a\cdot K_{1m}} + \frac{d_{2k,m}}{a\cdot K_{1m}^2} + \underline{O}\left(\frac{1}{K_{1m}^3}\right), \quad m = 1,2; \quad k = 1,2,3,..., \tag{4}$$

$$K_{1m} = k + \frac{\ln|z_m|}{2\pi i} + \frac{\arg(z_m)}{2\pi}, \quad z_{1,2} \ne 0, \quad z_{1,2} \ne \pm 1$$

причём

$$d_{1k,m} = \frac{1}{4\pi}\cdot\left\{\int_0^\pi q(t)dt + \frac{2\cdot(a_{12} - a_{11}\cdot a_{24})}{a_{10} + a_{24}} + \frac{a_{10} - a_{24}}{a_{10} + a_{24}}\cdot\frac{1}{\sin(2\pi K_{1m})}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^\pi q(t)\cdot\sin\left((4t - 2\pi)\cdot K_{1m}\right)\cdot dt\right\}, \quad k = 1,2,3,..., \quad m = 1,2.$$

Теоремы 1 и 2 доказываются разработанными автором методами работы [1].

Список литературы

1. Митрохин С.И. Спектральные свойства краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений с суммируемыми коэффициентами // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т.46, №8. – С. 1085–1093.