Используем интеграл (6) для определения осевого момента инерции шара при $a = b = c = R$:

$$I_z = \rho 8 \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/2} r d\varphi R \sqrt{\left(1 - r^2/R^2\right)} = \rho 8 \int_0^R r^3 \sqrt{\left(R^2 - r^2\right)} dr \frac{\pi}{2}.$$

Окончательно получим в цилиндрических координатах.

$$I_z = 4\pi\rho \int_0^R r^3 \sqrt{\left(R^2 - r^2\right)} dr.$$

Полученная величина $\sqrt{\left(R^2 - r^2\right)}$ есть половина высоты цилиндра радиусом r, вписываемого в шар, радиус которого равен R.

В сферических координатах будем иметь:

$$\sqrt{\left(R^2 - r^2\right)} = R\cos\theta;$$

$$r = R \sin\theta;$$

$$dr = R \cos\theta \, d\theta.$$

Осевой момент инерции шара в сферических координатах:

$$I_z = 4\pi\rho R^5 \int_0^{\pi/2} r^3 \sin^3\theta \cos^2\theta d\theta = 4\rho\pi R^5 \left(2/15\right) = 2m R^2/5.$$

Этот известный результат свидетельствует о корректности ключевого выражения (4), но не отвечает на вопрос о пределах интегрирования. Исследуем подкоренное выражение, имеющееся в в функции для пространственной кривой (4), приравнивая его нулю:

$$\sin^2\varphi\,(1 - r^2/b^2) + \cos^2\varphi(1 - r^2/a^2) = 0.$$

Преобразуем это выражение к виду:

$$\mathrm{tg}^2\,\varphi = -(1 - r^2/a^2)/(1 - r^2/b^2).$$

Полученное выражение для $r < a$ не имеет смысла. Это означает, что для любого $r < a$ $z \neq 0$. Тогда для переменной φ в первой четверти пределы интегрирования равны 0 и π/2, а для r будут 0 и a.

Для $r \geq a$ *случай* z = 0 возможен для некоторого $\varphi = \varphi_0$, вычисляемого следующим образом:

$$\varphi_0 = \mathrm{arctg}\,[-(1 - r^2/a^2)/(1 - r^2/b^2)]. \qquad (7)$$

В этом случае пределы интегрирования для φ равны φ_0 и π/2,а для r – соответственно a и b. Таким образом, интеграл (6) разбивается на два двойных интеграла:

$$I_z = \rho 8 \int_0^a r^2 dr \int_0^{\pi/2} c\left[\sqrt{\sin^2\varphi\left(1 - r^2/b^2\right) + \cos^2\varphi\left(1 - r^2/a^2\right)}\right] r d\varphi +$$
$$+\rho 8 \int_a^b r^2 dr \int_{\varphi 0}^{\pi/2} c\left[\sqrt{\sin^2\varphi\left(1 - r^2/b^2\right) + \cos^2\varphi\left(1 - r^2/a^2\right)}\right] r d\varphi. \qquad (8)$$

Возможно вычисление интегралов (8) по формуле Симпсона.

Рассматриваемый эллипсоид не является телом вращения и потому любая методика имеет свои проблемы. Оптимальный путь возможен при совместном использовании методик, скажем, решая вспомогательную задачу безусловно доминирующей методики тела бесконечно малой высоты (широко присутствует в математике и в прикладных дисциплинах) с использованием цилиндра малой толщины стенки.

Список литературы

1. Дронг В.И., Дубинин В.В., Ильин М.М. и др. Курс теоретической механики: учебник для вузов; под общ. ред. К.С. Колесникова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – С. 310-315.

ОЦЕНКА ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДИСПЕРСИИ АСИМПТОТИЧЕСКИ НЕСТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА

Мадыев А.П.

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ, e-mail: mapost3@gmail.com

Рассмотрена модель асимптотически нестационарного сигнала (АНСС), представляющей собой реакцию линейного динамического звена (ЛДЗ) с импульсной характеристикой $h_3(t)$ на включение стационарного случайного воздействия (ССВ) с известной дисперсией σ_B^2 и нормированной корреляционной функцией ρ. Решения целого ряда прикладных задач базируются на дисперсии АНСС, определяемой известным способом:

$$\sigma_S^2(t)=\sigma_B^2\int_0^t\int_0^t h_3(x)h_3(y)\rho(y-x)dxdy. \quad (1)$$

Для экспоненциально-косинусных $\rho(x)$ с аргументом под знаком модуля (1) примет вид [1]:

$$\sigma_S^2(t)=2\sigma_B^2\int_0^t h_3(y)F(y)dy, \quad (2)$$

где $$F(y)=\int_0^y h_3(x)\,\rho(y-x)dx. \quad (3)$$

Дисперсия (2) определяется аналитически, однако ее сложный вид далеко не всегда позволяет оценить предельные значения.

Функционал (3) есть свертка функций $h_3(x)$ и $\rho(x)$, причем для любых ССВ $-1 \le \rho\ (y-x) \le 1$ и в точке $x = y$ $\rho(0) = 1$. На основе подхода, изложенного в [2], установлено, что изменение $\rho\ (y-x)$ скачком в пределах своего диапазона в моменты, совпадающие с нулями x_j ($j = 1, 2, 3, ...$) импульсной характеристики $h_3(x)$, приводит (3) к следующему виду на произвольном $M + 1$ интервале знакопостоянства:

$$F(y)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{M}\int_{x_j}^{x_{j+1}}|h_3(x)|dx+\int_{x_{M+1}}^{y}h_3(x)dx, & h_3(x)>0,\\ -\left(\sum_{j=1}^{M}\int_{x_j}^{x_{j+1}}|h_3(x)|dx+\int_{x_{M+1}}^{y}|h_3(x)|dx\right), & h_3(x)<0,\end{cases} \quad (4)$$

где M – число полных интервалов знакопостоянства $h_3(x)$ до точки $x = y$; x_j, x_{j+1} – границы j-го интервала знакопостоянства $h_3(x)$.

Границами интервалов знакопостоянства $h_3(x)$ являются все нули $h_3(x)$ и обязательно $x_1 = 0$. В конце текущего интервала знакопостоянства, т.е. при $x = x_{M+2}$ (4) достигает максимально возможного значения по модулю. Таким образом, на произвольном k-м интервале знакопостоянства $h_3(x)$ (3) не превысит по модулю следующего значения:

$$|F_{k\max}|=\sum_{j=1}^{k}\int_{x_j}^{x_{j+1}}|h_3(x)|dx. \quad (5)$$

Знак оценки $F_{k\max}$ будет совпадать со знаком $h_3(x)$ на k-м интервале знакопостоянства:

$$\operatorname{sign} F_{k\max 3}=\operatorname{sign} h\ (x),\quad x_k<x<x_{k+1},$$

где x_k, x_{k+1} – границы k-го интервала знакопостоянства $h_3(x)$.

Теперь оценка сверху $\sigma^2_{S\max}(t)$ дисперсии (2) на основе оценки (5) вместо (3) примет вид:

$$\sigma^2_{S\max}(t)=2\sigma_B^2\left(\sum_{j=1}^{M}F_{j\max}\int_{t_j}^{t_{j+1}}h_3(y)dy+F_{M+1\max}\int_{t_{M+1}}^{t}h_3(y)dy\right). \quad (6)$$

Так как знаки оценки (5) функционала (3) и $h_3(x)$ совпадают, то (6) имеет вид монотонно нарастающей функции без локальных максимумов и минимумов. Определение оценки (6) не требует громоздких выкладок и позволяет оценить сверху дисперсию АНСС для любого ЛДЗ.

Список литературы

1. Первачев С.В., Валуев А.А., Чиликин В.М. Статистическая динамика радиотехнических следящих систем. – М.: Сов. радио, 1973. – 488 с.

2. Рыбаков И.Н. К вопросу об обобщении понятия резонанса для линейных систем с постоянными параметрами // Известия ВУЗов. Радиоэлектроника. – 1968. – т. XI, №8.

ПЕРСПЕКТИВА ПРИМЕНЕНИЯ ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ КАУЧУКА ИЗ ЛАТЕКСА СОПОЛИМЕРА N,N-ДИМЕТИЛ-N,N-ДИАЛЛИЛАММОНИЙ ХЛОРИДА С МАЛЕИНОВОЙ КИСЛОТОЙ

Никулин С.С., Жданова С.В.

Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронеж,
e-mail: jdanovaswetlana@yandex.ru

Каучуки, получаемые эмульсионной сополимеризацией, обладают комплексом положительных свойств и находят широкое применение в шинной и резинотехнической промышленности. В связи с этим в настоящее время продолжаются активные поисковые исследования по совершенствованию технологий их производства. Перспективными в этом плане представляют полимерные четвертичные соли аммония.

Цель работы – рассмотрение возможности применения в технологии выделения каучуков из латексов сополимера четвертичной соли аммония – N,N-диметил-N,N-диаллиламмоний хлорида с малеиновой кислотой (СДМДААХМК).

Интерес к использованию данного сополимера для выделения каучуков из латексов базируется на том, что звенья малеиновой кислоты, входящие в состав сополимера, повышают его кислотность, следовательно, это позволит снизить расход подкисляющего агента. Процесс коагуляции проводили по общепринятой методике. На первом этапе проведены исследования по влиянию температуры и расхода СДМДААХМК на полноту выделения каучука из латекса и было выяснено, что изучаемые параметры не влияют на выход каучука из латекса и расход СДМДААХМК остается на уровне – 1,5-2,0 кг/т каучука.