

УДК 621: 534; 833

## ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ. ВОЗМОЖНОСТИ ОЦЕНКИ ПРИВЕДЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

Елисеев С.В., Паршута Е.А., Большаков Р.С.

*ФБГОУ ВПО «Иркутский государственный университет путей сообщения»,  
Иркутск, e-mail: eliseev\_s@inbox.ru*

Рассматривается способ изменения динамического состояния виброзащитных систем через введение дополнительных силовых воздействий, которые находятся в определенных связях с известным внешним возмущением. Показано, что такой способ соответствует одной из форм автоматического управления состоянием по возмущению. Ключевым моментом в формировании предлагаемого подхода является наличие двух (как минимум) внешних воздействий, по отношению к которым предполагается возможность установления функциональной связи. Рассматривается простейшая форма связи в виде постоянного коэффициента между амплитудными значениями внешних сил. При этом принимается во внимание знак коэффициента. Показаны возможности изменения приведенных жесткостей системы, то есть изменения ее параметров при различных коэффициентах связей. Процессы влияния на состояние системы связаны с возможностями изменения частот собственных колебаний, режимов динамического гашения и др.

**Ключевые слова:** виброзащитная система, управление по возмущению, динамическое гашение колебаний

## TRANSFER FUNCTIONS OF MECHANICAL OSCILLATION SYSTEM. POSSIBILITIES OF ESTIMATION OF GENERALIZED STIFFNESS

Eliseev S.V., Parshuta E.A., Bolshakov R.S.

*FBSEI HPE «Irkutsk State Transport University», Irkutsk, e-mail: eliseev\_s@inbox.ru*

Approach of change of dynamical condition of vibroprotection systems through introduction of additional connection force influence are considered. Such approach accordances to form of automatical control by force of influence. Key moment in formation of offering method is presence two (at least) external influences in relation which are supposed installation possibility of function tie. Usually form of tie are considered in the form constant coefficient between amplitude meaning of external influences. Sign of coefficient is taken into account. Change coerced rigidities possibilities are shown that is change her parameters at different coefficients of tie. Influence processes on state ties of systems related to change frequencies own oscillations possibilities, dynamical absorbtion regimes and other.

**Keywords:** vibroprotection system, control to the influence, dynamical absorbtion of oscillations

Упругие параметры конкретных механических систем чаще всего производятся в статических режимах, когда к объекту в одной и той же точке и прикладывается усилие и измеряется смещение [1]. Полученные данные соответствуют представлениям об упругости системы (или объекта) в выбранной точке. Если точка приложения силы и точка наблюдения смещения, не совпадают, то можно ввести понятие об упругости, расширяющее первое определение. Можно предложить, в рамках проводимого исследования, такую упругость назвать кроссупругостью. Для оценки различных видов упругостей часто предлагается использовать передаточные функции (ПФ). Идеи такого подхода нашли отражение, в частности, в [2]. Передаточные функции, используемые в динамике машин, в частности, в задачах виброзащиты и виброизоляции обладают рядом свойств, определяемых из частотных уравнений их числителя и знаменателя. В [2, 3] было показано, что знаменатель передаточной функции (характеристическое уравнение) является, в определенном смысле, инвариантным в отношении выбора пар точек «вход-выход».

Специфика задач виброзащиты и виброизоляции заключается в том, что, как правило, динамическое состояние связано с обобщенными координатами положения объекта, которые являются «выходными сигналами», а «вход» – представляет собой смещение основания (кинематическое воздействие) или силу, прикладываемую к объекту защиты или фрагментам виброзащитной системы («силовое воздействие»). Отношения выходных и входных сигналов могут иметь различную физическую природу, а, следовательно, и размерность: отношение выхода в виде смещения к силе, как входному сигналу, характеризует податливость виброзащитной системы (ВЗС) в данной точке; инверсия отношения определяет жесткость системы [4]. Последнее дает возможность ввести в рассмотрение понятия динамической и статической жесткостей. Детализация этих понятий рассмотрена в работах [2, 5]. Динамическая жесткость определяется через соответствующую передаточную функцию системы и является комплексной величиной, а характеристики динамической жесткости зависят от частоты внешнего воздействия. По-существу,

механическая система между основанием и выбранным объектом защиты, состоящая из различных звеньев, может рассматриваться как обобщенная пружина. В [6, 7] представлены соответствующие обоснования и результаты исследования свойств таких пружин и возможностей, которыми они обладают.

Аналогично может рассматриваться и статическая ситуация, когда в передаточной функции (ПФ) принимаются нулевые значения частот и оценивается статическая жесткость или коэффициент упругости для данной пары выбранных точек «вход-выход». Такая упругость может быть названа приведенной. Если в системе имеется несколько степеней свободы, то коэффициент упругости (или жесткости) может определяться не только в точке приложения силы, пару соответствия могут составить любые две точки, что предполагает в системе возможность оценивать различные виды коэффициентов упругости.

**I. Общие положения. Постановка задачи исследования.** Передаточная функция механической колебательной системы представляет собой, в общем случае, дробно-рациональное выражение. Характеристическое частотное уравнение используется для оценки динамического состояния системы при гармонических внешних воздействиях.

Числитель передаточной функции отражает динамические свойства взаимодействия элементов механической системы и используется для определения режимов динамического гашения колебаний. Структура частотного уравнения числителя содержит информацию об особенностях системы внешних воздействий. Сама же структурная схема механической колебательной системы является аналогом системы дифференциальных уравнений и соотносится с эквивалентной в динамическом отношении системой автоматического уравнения. Правила взаимных преобразований представлены, например, в [3].

При нулевых значениях комплексной переменной передаточная функция системы преобразуется в выражение, которое соответствует приведенной податливости или приведенной жесткости в статическом состоянии. Если это не так, то передаточная функция представляет собой соответствующую динамическую характеристику. Модуль соответствующей передаточной функции или амплитудно-частотная характеристика являются приведенной динамической жесткостью или податливостью. В статическом случае, когда внешняя сила постоянна, приведенная жесткость или податливость должна быть положительной

величиной; её равенство нулю соответствует граничному состоянию для статической устойчивости.

Целью предлагаемого исследования является определение зависимости между параметрами системы, внешними факторами и реакциями механической колебательной системы, включающей в свой состав объект вибрационной защиты.

**II. Свойства цепной системы (статики).** На рис. 1 приведена расчетная схема цепной виброзащитной системы (ВЗС) с двумя степенями свободы.

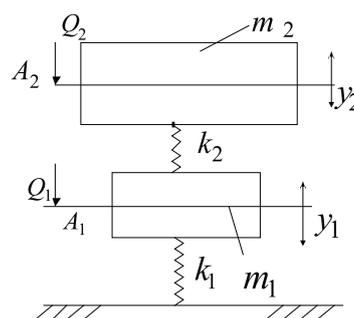


Рис. 1. Расчетная схема цепной виброзащитной системы ( $y_1, y_2$  – обобщенные координаты;  $k_1, k_2$  – упругости пружин;  $m_1, m_2$  – массы элементов ВЗС;  $Q_1, Q_2$  – силовые воздействия)

Дифференциальные уравнения движения (ВЗС) имеют вид:

$$m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 + k_2 y_1 - k_2 y_2 = Q_1; \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + k_2 y_2 - k_2 y_1 = Q_2. \quad (2)$$

Соответствующая уравнениям (1), (2) структурная схема представлена на рис. 2. Она имеет две парциальные подсистемы, взаимодействующие через упругие связи. Силы трения в системе (рис. 1) предполагаются пренебрежимо малыми.

Передаточная функция системы для возможных пар «сила-смещение» имеет вид в зависимости от выбора точек входа и выхода:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_1(\bar{Q}_2 = 0)} = \frac{k_2}{(m_1 p^2 + k_1 + k_2)(m_2 p^2 + k_2) - k_2^2}; \quad (3)$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1(\bar{Q}_2 = 0)} = \frac{m_2 p^2 + k_2}{A_0}; \quad (4)$$

$$W_3(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_2(\bar{Q}_1 = 0)} = \frac{k_2}{A_0}; \quad (5)$$

$$W_4(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_2 (\bar{Q}_1 = 0)} = \frac{(m_1 p^2 + k_1 + k_2)}{A_0}, \quad (6) \quad \text{где}$$

$$A_0 = m_1 m_2 p^4 + p^2 [m_2 (k_1 + k_2) + m_1 k_2] + k_1 k_2 \quad (7)$$

– характеристическое уравнение системы.

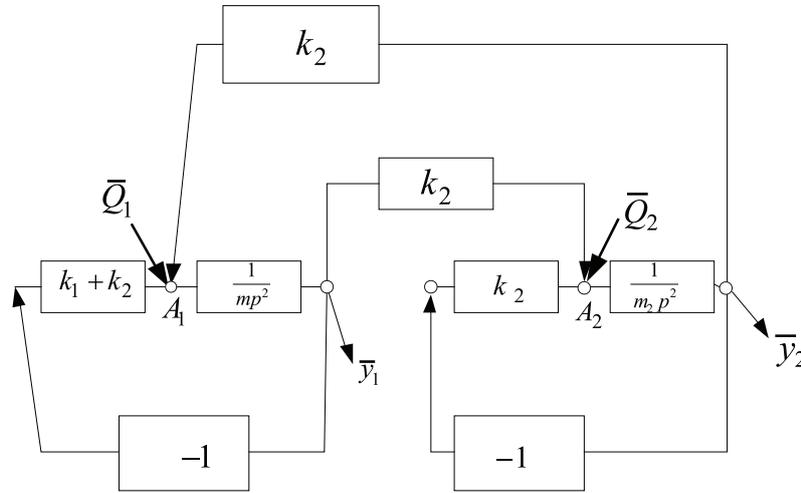


Рис. 2. Структурная схема ВЗС, соответствующая исходной расчетной схеме ВЗС (рис. 1)

На рис. 1 и 2 обозначены такие точки  $A_1$  и  $A_2$  приложения внешних сил  $Q_1$  и  $Q_2$ . Из (4) следует, что при приложении в т.  $A_1$  силы  $Q_1$  и наблюдении за смещением т.  $A_1$  – коэффициент упругости имеет значение  $k_1$ , ( $k_1 = k_{11}$ ). Если будет наблюдаться смещение в т.  $A_1$ , а сила будет приложена в т.  $A_2$  (см. (5)), то коэффициент упругости будет равен  $k_{21} = k_1$ . Аналогично, при силе  $Q_2$ , приложенной в т.  $A_2$  (см.(6)), найдем, что  $k_{22} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ . Соответственно при приложении силы  $Q_2$  в т.  $A_1$  и наблюдении за смеще-

нием т.  $A_2$  (см. (3)) упругость определится значением  $k_1$ , ( $k_{12} = k_1$ ).

Коэффициенты жесткости  $k_{12}$  и  $k_{21}$  характеризуют смещения точек, к которым силы непосредственно не прикладываются. Будем полагать, что эти смещения характеризуют «кроссупругость».

Для получения значений приведенных жесткостей использованы выражения (3)–(6) с учетом соответствующих передаточных функций.

В табл. 1 представлены возможные варианты соотношения пар точек приложения сил и точек наблюдения.

Таблица 1

Значение коэффициентов упругости для расчетной схемы на рис. 1

Координаты точек		Координаты точек наблюдения		Примечание
		$y_1$	$y_2$	
Координаты точек приложения обобщенных сил	$y_1$	$k_{11} = k_1$	$k_{12} = k_1$	$Q_1 = Q$ $Q_2 = 0$
	$y_2$	$k_{21} = k_1$	$k_{22} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$	$Q_2 = Q$ $Q_1 = 0$

Примечание.  $k_{12}$  и  $k_{21}$  коэффициенты кроссупругости.

Отметим, что в трех рассматриваемых случаях жесткость системы будет определяться через  $k_1$ , и в одном – как последовательное соединение пружин – выражение

(6); при отсутствии детальной информации о точках приложения силы и точках наблюдения параметры упругости на уровне приведенных коэффициентов могут раз-

личаться. Приведенные результаты вполне объяснимы, исходя из физических представлений о передаче сил [3].

**III. Особенности ВЗС балочного типа.** Рассмотрим виброзащитную систему (рис. 3), в которой сила приложена в т.  $A$  на конце рычага длиной  $l$ . При этом  $l > l_1$ , то

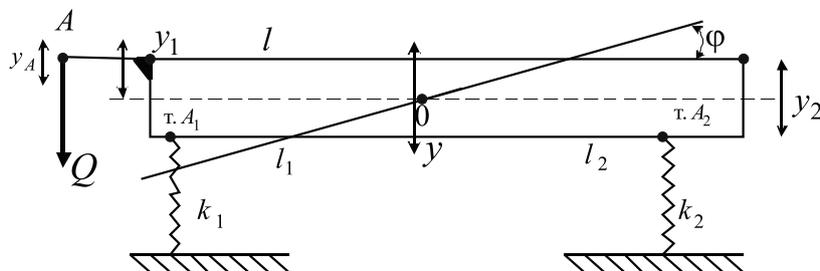


Рис. 3. Расчетная схема системы для определения её статической устойчивости

Примем для дальнейших расчетов ряд обозначений:  $y, \varphi, y_1, y_2$  обобщенные координаты объекта в неподвижной системе координат;  $k_1, k_2$  упругости;  $M, I$  – массоинерционные параметры. Используя обычные приемы, составим систему уравнений движения в координатах  $y_1$  и  $y_2$ :

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = Q_1, \quad a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = Q_2, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= (Ma^2 + Ic^2)p^2 + k_1; \\ a_{12} &= (Mab - Ic^2)p^2; \\ a_{12} &= a_{21}; \\ a_{22} &= (Mb^2 + Ic^2)p^2 + k_2; \end{aligned} \quad (8')$$

$Q_1$  и  $Q_2$  обобщенные силы по коэффициентам  $y_1$  и  $y_2$  ( $p = j\omega$  – комплексная переменная). Для дальнейших исследований принято, что

$$\begin{aligned} a &= \frac{l_2}{l_1 + l_2}; \quad b = \frac{l_1}{l_1 + l_2}; \\ c &= \frac{1}{l_1 + l_2}; \\ y &= ay_1 + by_2; \\ \varphi &= c(y_2 - y_1); \\ y_1 &= y + l_1\varphi; \\ y_2 &= y - l_2\varphi. \end{aligned} \quad (8'')$$

Обобщенные силы  $Q_1$  и  $Q_2$  в (8) зависят от выбора системы обобщенных координат и мест их приложения. Известно [8], что

$$\bar{y}_1 = \frac{\bar{Q}_1 a_{22} - \bar{Q}_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}; \quad (9)$$

$$\bar{y}_2 = \frac{-\bar{Q}_1 a_{12} + \bar{Q}_2 a_{11}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}. \quad (9')$$

есть точка  $A$  может быть вынесена за пределы твердого тела, а  $l = AO$  то есть определяет расстояние до центра тяжести объекта. Прилагаемая в т.  $A$  сила  $Q$  является постоянной. Полагаем, что система находится в состоянии равновесия; сила  $Q$  не зависит от времени.

В системе обобщенных координат и  $\varphi$  уравнения движения системы (рис. 3) имеют аналогичный вид (8), однако, при этом коэффициенты уравнения и обобщенные силы  $Q_y, Q_\varphi$  будут другими:

$$\begin{aligned} a_{11} &= Mp^2 + k_1 + k_2; \\ a_{12} &= a_{21} = -k_2 l_2 + k_1 l_1; \\ a_{22} &= Ip^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Структурные схемы эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления [2], представлены на рис. 4, а, б.

Структурные схемы балочных систем (рис. 4, а, б) отличаются от структурных схем цепного типа (рис. 2), прежде всего, характером парциальных связей, которые при определенных соотношениях обеспечивают распад системы на два независимых контура.

Для определения обобщенных сил, соответствующих обобщенным координатам  $y$  и  $\varphi$ , а также  $y_1$  и  $y_2$ , силу  $Q$  (рис. 3) можно перенести из т.  $A$  в т.  $O$  (центр тяжести), тогда получим (обобщенные силы) для системы координат  $y, \varphi$  соответственно:  $Q_0 = Q; M_0 = Ql$ , где  $Q_0$  – сила, приложенная в центре тяжести, то есть точке  $O$ , а  $M_0$  – момент внешней силы  $Q$  относительно центра тяжести  $O$ . Полагая

$$Q_0 \delta y + M_0 \delta \varphi = Q \delta y_1 + Q_2 \delta y_2, \quad (11)$$

найдем, что

$$Q_1 = Q_0 a - c M_0; \quad Q_2 = Q_0 b + c M_0$$

или

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q(a - cl); \\ Q_2 &= Q(b + cl), \end{aligned} \quad (12)$$

при этом  $Q_0 = Q, M_0 = Q_0 l$ .

Определим передаточную функцию для  $y_A$ :

$$W_A(p) = \frac{\bar{y}_A}{\bar{Q}}, \quad (13)$$

где  $\bar{y}_A = \bar{y} + l\bar{\varphi}$ . (13')

В данном случае учтем, что

$$W'_y(p) = \frac{\bar{y}}{\bar{Q}_{0(M_0=0)}} = \frac{Ip^2 + k_1l_1^2 + k_2l_2^2}{A_0}; \quad (14)$$

$$W''_y(p) = \frac{\bar{y}}{\bar{M}_0(\bar{Q}_0=0)} = \frac{(Mp^2 + k_1 + k_2)}{A_0}, \quad (15)$$

где

$$A_0 = (Mp^2 + k_1 + k_2)(Ip^2 + k_1l_1^2 + k_2l_2^2) - (k_1l_1 - k_2l_2)^2 \quad (16)$$

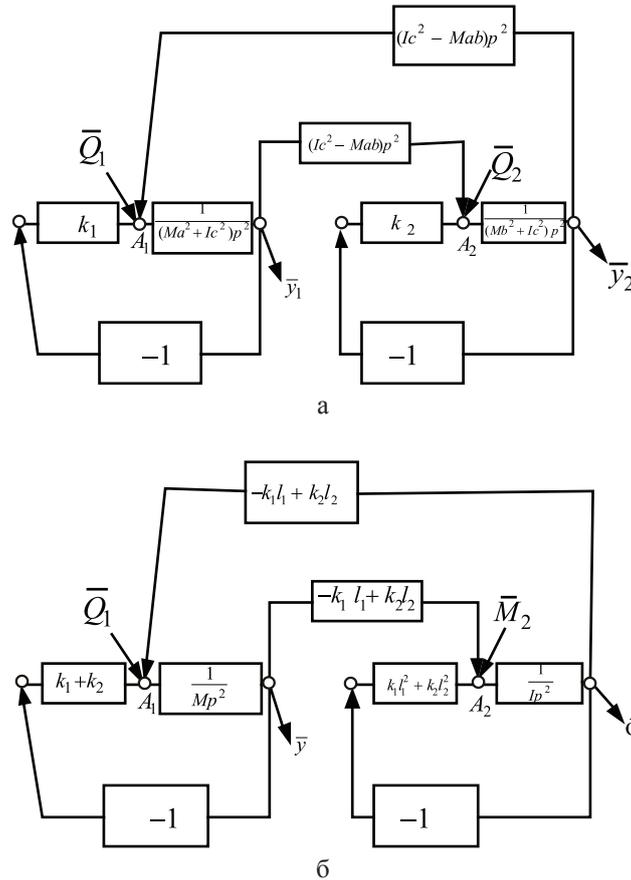


Рис. 4. Структурные схемы, соответствующие расчетной схеме системы на рис. 1: а – для системы координат  $y_1, y_2$ ; б – для системы координат  $y$  и  $\varphi$

Принимая, что сила  $Q$  приложена в т.  $A$ , координата движения которой  $y_A$  определяется выражением (13'), а  $y$  и  $\varphi$  – соответственно из (8''), используем (13')–(16) и найдем

$$\bar{y} = \frac{\bar{Q}}{A_0} [Ip^2 + k_1l_1^2 + k_2l_2^2 + l(k_1l_1 - k_2l_2)]. \quad (17)$$

В свою очередь, по координате  $\bar{\varphi}$  запишем

$$\bar{\varphi} = \frac{\bar{Q} [l(Mp^2 + k_1 + k_2) - k_1l_1 + k_2l_2]}{A_0}. \quad (18)$$

Таким образом,

$$W'_1(p) = \frac{\bar{y}}{\bar{Q}} = \frac{Ip^2 + k_1l_1^2 + k_2l_2^2 - l(k_1l_1 - k_2l_2)}{A_0}; \quad (19)$$

$$W''_2 = \frac{\bar{\varphi}}{\bar{Q}} = \frac{(Mp^2 + k_1 + k_2)l - k_1l_1 + k_2l_2}{A_0}. \quad (20)$$

После некоторых преобразований передаточная функция для т.  $A$  примет вид:

$$W_A(p) = \frac{\bar{y}_A}{\bar{Q}} = \frac{Ip^2 + k_1l_1^2 + k_2l_2^2 - l(k_1l_1 - k_2l_2) + l[(Mp^2 + k_1 + k_2)l - k_1l_1 + k_2l_2]}{A_0}. \quad (21)$$

Отметим, что по  $y_A$  возможен режим динамического гашения на частоте

$$\omega_{\text{дин } A}^2 = \frac{(k_2 l_2^2 + k_1 l_1^2) + l^2(k_1 + k_2) - 2l(k_1 l_1 - k_2 l_2)}{I + Ml^2}. \quad (22)$$

Здесь  $l$  изменяется от 0 до  $AO$ , ( $l < OA$ ).

Если принять  $l = l_1$ , то есть сила  $Q$  прикладывается в т.  $A_1$  (координата  $y_1$ ), тогда из (22) следует, что

$$\omega_{\text{дин } y_1}^2 = \frac{k_2(l_1 + l_2)^2}{I + Ml_1^2}. \quad (22')$$

Переход к другим координатам (например,  $y_2$ ) связан с тем, что  $l$  переходит через нулевое значение. При этом изменяется расчетная схема, поскольку момент силы относительно центра тяжести меняет знак, и расчетную схему необходимо приводить в соответствие с направлением движения по координатам, хотя величина силы, приложенной в центре тяжести  $O$ , и её направление остаются неизменными. Можно

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}} = \frac{[(Mb^2 + Ic^2)p^2 + k_2](a - cl) + (Ic^2 - Mab)p^2(b + cl)}{A'_0}. \quad (25)$$

Аналогичным образом могут быть найдены передаточную функцию по координате  $y_2$  –

$$W'_{y_2}(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_{2(\bar{Q}_2=0)}} = \frac{(Ma^2 + Ic^2)p^2 + k_1}{A'_0}; \quad (26)$$

$$\bar{W}_{y_2}(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}} = \frac{(Ic^2 - Mab)p^2(a - cl) + [(Ma^2 + Ic^2)p^2 + k_1](b + cl)}{A'_0}, \quad (28)$$

где

$$A'_0 = [(Ma^2 + Ic^2)p^2 + k_1][(Mb^2 + Ic^2)p^2 + k_2] - [(Mab - Ic^2)p^2]^2. \quad (29)$$

Отметим, что переход от системы обобщенных координат  $y, \varphi$  к системе координат  $y_1$  и  $y_2$  имеет особенности, в частности,  $A'_0$ , определяемое выражением (29), будет отличаться от  $A_0$  (16) по размерности. Например, в (29) присутствует коэффициент  $c^2$ , тогда как в (16) этого коэффициента нет. Учитывая то обстоятельство, что в (29), а также в числителях (25) и (28) имеется  $c^2$ , происходит взаимное сокращение параметров, и знаменатель передаточной функции не изменяется, что соответствует известным положениям.

Проведение соответствующих преобразований показывает, что подстановка теку-

щих значений  $l_1$  и  $l_2$  вместо  $l$  в выражении (21) позволяет получить соответственно выражения (25) и (28). При  $l = 0$ , когда сила  $Q$  будет приложена в центре тяжести тела т.  $O$ , тогда получим

полагать, что при симметричном переносе т.  $A$  за внешнюю границу  $AO_2$  структурных изменений в (14)–(16) и других выражениях, включая (22), не произойдет, а в соответствующие формулы параметр будет входить со знаком (-), например,  $l = -l_2$  и т.д.

$$W'_{y_1}(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_{1(\bar{Q}_2=0)}} = \frac{(Mb^2 + Ic^2)p^2 + k_2}{A'_0}; \quad (23)$$

$$W''_{y_1}(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_{2(\bar{Q}_1=0)}} = \frac{(Ic^2 - Mab)p^2}{A'_0}; \quad (24)$$

в целом по  $y_1$  получим:

$$W''_{y_2}(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_{1(\bar{Q}_2=0)}} = \frac{(Ic^2 - Mab)p^2}{A'_0}. \quad (27)$$

Суммируя (26), (27), получим по координате  $y_2$ :

$$W_y(p) = \frac{\bar{y}_A}{\bar{Q}_{(l=0)}}(p) = \frac{Ip^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{A_0},$$

что соответствует (14).

**IV. Особенности ВЗС балочного типа при статическом нагружении.** В этом случае принимается,  $p = 0$ , а выражение (21) преобразуется к виду:

$$W'_A(p) = \frac{l^2(k_1 + k_2) - 2l(k_1 l_1 - k_2 l_2) + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{k_1 k_2 (l_1 + l_2)^2}, \quad (30)$$

которое имеет физический смысл податливости. При этом числитель (30) не принимает значения, равного нулю. Увеличение  $l$  не при-

водит к тому, что податливость может быть отрицательной. Используя понятие приведенной жесткости, получим в данном случае для т.  $A$

$$k_{npA} = \frac{k_1 k_2 (l_1 + l_2)^2}{(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) + l^2 (k_1 + k_2) - 2l(k_1 l_1 - k_2 l_2)}. \quad (31)$$

Для оценки зависимости  $k_{np}$  системы от величины  $l$  найдем некоторые значения  $k_{np}$  в точках  $l = l_1$ ,  $l = 0$ ,  $l = -l_2$ . Используем для этих целей (21), которое для определения приведенной жесткости инверсируем, тогда:

при  $l = 0$  –  $k_{np1} = \frac{k_1 k_2 (l_1 + l_2)^2}{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}; \quad (32)$

если  $l = l_1$ , то  $k_{np} = \frac{k_1 (l_1 + l_2)}{2l_2}; \quad (33)$

$$\omega_{дин A}^2 = \frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 + l^2 (k_1 + k_2) - 2l(k_1 l_1 - k_2 l_2)}{I + Ml^2}. \quad (35)$$

При  $l = 0$  из (35) можно получить

$$\omega_{дин A}^2 = \frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{I}. \quad (36)$$

Что совпадает также с результатом использования (14). В свою очередь  $l = l_1$

$$\omega_{дин A}^2 = \frac{k_1 (l_1 + l_2)^2}{I + Ml_1^2}. \quad (37)$$

При тех же условиях при  $l = -l_2$

$$\omega_{дин A}^2 = \frac{2k_1 l_1 (l_1 + l_2)}{I + Ml_2^2}. \quad (38)$$

если  $l = -l_2$ , то  $k_{np} = \frac{(l_1 + l_2)k_2}{(l_1 - l_2)^2}. \quad (34)$

**V. Режимы динамического гашения в виброзащитной системе.** Отметим, что режимы динамического гашения по координате  $y_A$  определяются из частотного уравнения числителя (22) и зависят от  $l$ , то есть места приложения силы  $Q$ :

Результаты, полученные из (18) и (28) совпадают при  $l = 0$ , сила приложена к центру тяжести (точки  $A$  и  $O$  совпадают, момент силы отсутствует), тогда

$$\omega_{дин \phi}^2 = \frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{I}, \quad (39)$$

режим динамического гашения по  $\phi$  от силы  $Q$  в точке  $A$ , совпадающей с т.  $O$ , отсутствует.

В табл. 2 приведены сводные данные о режимах динамического гашения колебания, в которых нашло отражение влияние мест расположения точек приложения сил на параметры систем.

**Таблица 2**

Значения частот динамического гашения в зависимости от расстояния  $l$  точки приложения силы  $Q$  от центра тяжести

№ п/п	Расстояние	Частоты динамического гашения				
		Точка $A$	Центр тяжести ( $y$ )	Центр тяжести	Координата	Координата
1.	$l = 0$	$\frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{I}$	$\frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{I}$	Не реализуется	$\frac{k_2 l_2 (l_1 + l_2)}{I}$	$\frac{k_1 l_1 (l_1 + l_2)}{I}$
2.	$l = l_1$	$\frac{k_2 (l_1 + l_2)^2}{I + Ml_1^2}$	$\frac{k_2 l_2 (l_2 - l_1)}{I}$	$\frac{k_2 (l_1 + l_2)}{Ml_1}$	$\frac{k_2 (l_2^2 - l_1^2)}{I - Ml_1^2}$	$\frac{k_1 (l_1 + l_2)^2}{I + Ml_1^2}$
3.	$l = -l_2$	$\frac{2k_1 l_1 (l_1 + l_2)}{I - Ml_2^2}$	$\frac{k_1 l_1 (l_1 - l_2)}{I}$	$\frac{k_2 (l_2 + l_1)}{Ml_2}$	$\frac{k_2 l_2 (l_1 + l_2)}{I + Ml_2 l_1}$	$\frac{k_1 (l_1^2 - l_2^2)}{I - Ml_2^2}$

**Закключение**

Таким образом, система внешних воздействий, если иметь в виду их формы (моменты и силы) и расположение мест их приложения, могут существенным образом менять свойства исходной механической

системы, рассматриваемой в качестве виброзащитной.

1. На примере цепных систем можно показать, что в статическом режиме существуют различия между смещениями в точках непосредственного приложения сил и в точках наблюдения. последнее позволя-

ет ввести понятия о «кроссупругости» системы. Аналогичные представления можно перенести на системы балочного типа и др.

2. Передаточные функции системы позволяют оценивать свойства исходной модели виброзащиты или виброизоляции (если иметь в виду статическую устойчивость) при подстановке с получением, в зависимости от вида передаточной функции, податливости или приведенной жесткости.

3. Выбирая соответствующим образом систему внешних воздействий и используя передаточную функцию, можно управлять запасом статической устойчивости и определять границы расположения точек приложения сил.

4. Изменение параметров, связанных с формированием системы внешних воздействий, показывает их влияние на динамические свойства исходной системы и возможности управления режимами динамического гашения. В более общем виде последнее можно отнести к такому способу виброзащиты объекта, когда при наличии внешних независимых возмущений предлагается введение специальным образом подобранных сил.

В традиционных схемах динамического гашения такой подход реализуется присоединением дополнительной массы на пружине. Однако в задачах более сложных возникает проблема выбора точек приложения гасителя.

Предлагаемый подход создает основу комплексного подхода, связанного и с фор-

мой реализации силовых воздействий и с геометрией их расположения в системе.

*Исследования выполнены по гранту в рамках федеральной целевой программы «Научные и педагогические кадры инновационной России» на 2012 – 2013 г.г. (XLVII очередь, мероприятие 1.3.2. – естественные науки) № 14.132.21.1362.*

#### Список литературы

1. Ротенберг Р.В. Подвеска автомобиля. – М.: Машиностроение, 1972. – 372 с.
2. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов / С.В. Елисеев, Ю.Н. Резник, А.П. Хоменко, А.А. Засядко. – Иркутск.: Изд-во ИГУ, 2008. – 523 с.
3. Белокобыльский С.В., Ситов И.С. Способы и средства изменения динамического состояния технологических комплексов для вибрационного заглаживания // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – ИргУПС, 2007. – Вып. № 2 (13). – С. 46–52.
4. Вибрации в технике: справочник. В 6-ти т. / под ред. Э.Э. Лавенделла. – Т.6. Защита от вибрации и ударов. – М.: Машиностроение, 1981. – 513 с.
5. Рычажные связи в задачах динамики механических колебательных систем. Теоретические аспекты / С.В. Елисеев, С.В. Белокобыльский, Р.Ю. Упырь, В.Е. Гозбенко // Иркутский гос. ун-т путей сообщения. – Иркутск, 2009. – 159 с. – Рус. Деп. в ВИНТИ 27.11.09 № 737-В 2009.
6. Елисеев С.В. Обобщенная пружина в задачах машин и оборудования / С.В. Белокобыльский, Р.Ю. Упырь // Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво) / Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка. т.1 – Полтава: ПолтНТУ, 2009. – Вып. 3(25). – С. 79–89.
7. Упырь Р.Ю. Динамика механических колебательных систем с учетом пространственных форм соединений элементарных звеньев: дис. ... канд. техн. наук. – Иркутск.: ИргУПС, 2009. – 185 с.
8. Дружинский И.А. Механические цепи. – М.: Машиностроение. 1977. – 224 с.