УДК 621: 534; 833

ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С РЫЧАЖНЫМИ МЕХАНИЗМАМИ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Хоменко А.П., Артюнин А.И., Ермошенко Ю.В.

ФБГОУ ВПО «Иркутский государственный университет путей сообщения», Иркутск, e-mail: eliseev_s@inbox.ru

Предлагается методическая основа построения математических моделей для транспортных подвесок. Рассматриваемые системы имеют рычажные механизмы и дополнительные связи, которые могут быть реализованы с помощью элементарных звеньев расширенного набора. Рассмотрена оригинальная схема транспортной подвески с двумя рычажными механизмами, которые могут взаимодействовать между собой через настраиваемый элемент. Предложен метод построения математической модели в виде эквивалентной в динамическом отношении структурной схемы теории автоматического управления. Получены аналитические соотношения для определения характерных режимов динамического гашения колебаний и развязка парциальных систем. Приведены данные вычислительного моделирования. Показаны возможности изменения свойств системы при выборе настроечных параметров.

Ключевые слова: виброзащитная система, динамическое гашение колебаний, рычажные механизмы и связи

DYNAMICS OF MECHANICAL OSCILLATION SYSTEMS WITH LEVER MECHANISMS FOR TRANSFORMATION MOTION

Khomenko A.P., Artyunin A.I., Ermoshenko Y.V.

FBSEI HPE «Irkutsk State Transport University», Irkutsk, e-mail: eliseev_s@inbox.ru

Methodical bases for building of transport mathematical models vibroprotection systems are suggested. Considered systems have lever mechanisms and additional ties, which can be realized through using of elementary typical links of widen collection. Original scheme of transport support system with two lever mechanisms which have interactions through regulate element is considered. Method of creature of mathematical models as equivalent analog in dynamical respect on comparison with structural scheme of automatic control system is offered. Analytical correlations for definition for characteristic regimes such as dynamical absorbtion and denouement of partial systems are received. Results of digital modeling are bring. Possibilities regulate parameters are shown.

Keywords: vibroprotection system, dynamical absorbtion of oscillation, lever links and ties

Динамике виброзащитных систем в их разнообразных формах конструктивно-технического исполнения посвящено достаточно много работ [1–3]. Как правило, в составе механических колебательных систем используются традиционные элементы в виде пружин, демпферов и твердых тел. Вместе с тем, в последние годы активно используются для получения различных динамических свойств и другие элементы и устройства, позволяющие ввести в рассмотрение динамические эффекты в преобразованиях относительного движения, а также различные рычажные связи и механизмы [4–6]. Введение рычажных связей может существенным образом изменять динамические свойства системы, что проявляется не только на уровне межпарциальных взаимодействий, но и в возможностях создания новых динамических режимов. Последние могут, в частности, принимать формы одновременного динамического гашения по нескольким обобщенным координатам [4–6]. Многие вопросы особенностей влияния рычажных связей еще не получили должной детализации в раскрытии механизмов динамических взаимодействий, что предопределяет интерес к определенным направлениям исследований.

В предлагаемой статье ставится задача оценки возможностей изменения динамического состояния объекта защиты в виде твердого тела на упругих опорах при наличии в виброзащитной системе более сложной, чем в известных схемах, дополнительной инерционно-упругой системы связей, реализуемых с помощью соосных рычажнх механизмов.

I. Общие положения. Предлагаемая подвеска, точнее, ее модель, состоит (рис. 1) из объекта защиты массой M с моментом инерции I. Центр тяжести твердого тела расположен в т. A; в системе подвески задействованы два рычага с массами m_1 и m_2; их моменты инерции относительно т. A обозначаются соответственно через I_1 и I_2; центры тяжести рычагов A_1, B_1 и A_2, B_2 находятся в точках O_1 и O_2. Точки B_1 и B_2 соединены специальным устройством, имеющим передаточную функцию W_0 [7]. В простейшем случае передаточная функция может быть определена параметрами упругого элемента, например, обладающего жесткостью k_3. В других случаях это может быть более сложное устройство, в том числе и активное, то есть обладающее независимым источником энергии и системой формирования управляющей силы. Расчетная схема на рис. 1 может рассматриваться как модель подвески двигателей в локомотивах, в которой закладываются возможности управления динамическим состоянием.

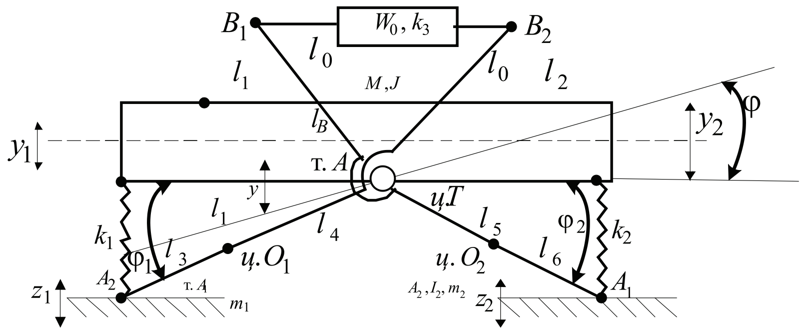


Рис. 1. Расчетная схема тележки с двигателями с опорно-осевой подвеской (z_1 и z_2 – кинематические воздействия)

Предполагается, что силы сопротивления малы и оказывают малое влияние на динамику системы. Положение центров тяжести определяется соответствующими длинами отрезков l_1–l_6. Координаты y_1 и y_2 взяты в неподвижной системе координат. Предполагается также, что в точках A_1 и A_2 допускаются горизонтальные скольжения, что обеспечивает возможность вертикального движения центра тяжести объекта защиты (точка A). Для дальнейших расчетов принимаются обозначения

$$y = ay_1 + by_2;$$

$$\varphi = (y_1 - y_2)c;$$

$$a = \frac{l_2}{l_1 + l_2}; \quad b = \frac{l_1}{l_1 + l_2}; \tag{1}$$

$$c = \frac{1}{l_1 + l_2}.$$

В определении кинетической энергии системы на рис. 1 используются известные приемы [8]. Учитывая особенности конструктивного построения транспортной подвески, наличие сочленений трех твердых тел, можно полагать, что кинетическая энергия системы представляет собой сумму кинетических энергий составных частей в движении относительно неподвижной системы координат, тогда

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \tag{2}$$

В выражении (2) T_1 соответствует кинетической энергии тела массой m_1, имеющего относительно центра тяжести (т. A) момент инерции I_1, поэтому

$$T_1 = \frac{1}{2}M_1\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2, \tag{3}$$

где y – координата центра тяжести твердого тела (т. A); φ – угол поворота относительно центра тяжести. Кинетическая энергия подвижных блоков m_1I_1 и m_2I_2 определяется с учетом сложного характера их движения. Для определения скорости точки A_1 в неподвижной системе координат, используется схема распределения скоростей, приведенная на рис. 2.

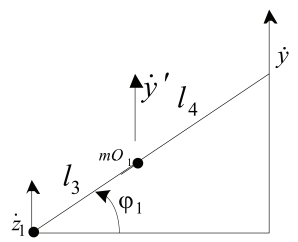


Рис. 2. Схема распределения скоростей в подвижном блоке

Отметим, что более точным является представление контакта подвижного блока с вибрирующей поверхностью с учетом возможности горизонтального смещения. Однако, на предварительной стадии рассмотрения, будем полагать этот фактор, также как и демпфирование колебаний, маловлияющим. Введем ряд дополнительных соотношений

$$\dot{y}' = \frac{\dot{y}l_4 + \dot{z}_1 l_3}{l_4 + l_3} = a_1\dot{y} + b_1\dot{z}_1, \tag{4}$$

где $a_1 = \dfrac{l_4}{l_3 + l_4}$; $b_1 = \dfrac{l_3}{l_3 + l_4}$.

Соответственно для второго блока получим

$$\dot{y}'' = a_2\dot{y} + b_2\dot{z}_2, \tag{5}$$

при этом $a_2 = \dfrac{l_5}{l_5 + l_6}$; $b_2 = \dfrac{l_6}{l_5 + l_6}$.

Подвижные рычажные фрагменты участвуют также во вращательном движении относительно точки A. Параметры этого вращения определяются как $y_1 - z_1$ и $y_2 - z_2$что позволяет найти угловые скорости

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{\dot{y}_1 - \dot{z}_1}{l_3 + l_4} = c_1(\dot{y} - \dot{z}_1); \quad (6)$$

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{\dot{y}_2 - \dot{z}_2}{l_5 + l_6} = c_2(\dot{y} - \dot{z}_2), \quad (7)$$

где $c_1 = \dfrac{1}{l_3 + l_4}$; $c_2 = \dfrac{1}{l_5 + l_6}$;

при дальнейших расчетах принято, что $l_3 + l_4 = l_5 + l_6 = L_1$, $l_1 + l_2 = L$. Более детализированный учет параметров предполагает, что $\varphi_1 = \varphi_{10} + \Delta\varphi_1$, а $\omega_1 = \dfrac{d(\Delta\varphi_1)}{dt}$, соответственно – $\omega_2 = \dfrac{d(\Delta\varphi_2)}{dt}$. При этом $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ могут рассматриваться как малые приращения углов поворота. В свою очередь, полагая $\varphi_1 \approx \varphi_{10}$ и $\varphi_1 \approx \varphi_{20}$, можно записать соотношения

$$\begin{aligned} y_1 - z_1 &= (l_3 + l_4)\sin\varphi_1; \\ y_2 - z_2 &= (l_5 + l_6)\sin\varphi_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, кинетическая энергия рассматриваемой системы с учетом (1–8) определяется

$$T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}M_1(\dot{y}')^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}M_2(\dot{y}'')^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\varphi}_2^2. \quad (9)$$

Потенциальная энергия системы определяется деформациями упругих элементов примет вид

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - z_2) + \frac{1}{2}k_3c_3^2(\varphi_1 - \varphi_2)^2, \ (a_3 < 1), \quad (10)$$

где $c_3 = a_3 l_0$ а a_3 – коэффициент, учитывающий геометрические особенности расположения рычагов: A_1B_1 и A_2B_2 принимаются в первом приближении такими, что выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (y_1 - z_1)/(l_3 + l_4); \\ \varphi_2 &= (y_2 - z_2)/(l_5 + l_6). \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом (4)–(10) можно записать кинетическую энергию системы в виде

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}M_1(a_1\dot{y} + b_1\dot{z}_1)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}M_2(a_2\dot{y} + b_2\dot{z}_2)^2 + \frac{1}{2}I_1c_1^2(\dot{y} - \dot{z}_1)^2 + \frac{1}{2}I_2c_2^2(\dot{y} - \dot{z}_2)^2, \end{aligned} \quad (12)$$

а потенциальную энергию (10) соответственно

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2}k_1\left[(y - l_1\varphi)^2 - 2(y - l_1\varphi)z_1 + z_1^2\right] + \frac{1}{2}k_2\left[(y + l_2\varphi)^2 - 2(y + l_2\varphi)z_2 + z_2^2\right]^2 + \\ &+ \frac{1}{2}k_3c_3^2\left[y(c_1 - c_2) - \varphi(c_1l_1 - c_2l_2) + c_2z_2 - c_1z_1\right]^2. \end{aligned} \quad (13)$$

После ряда промежуточных выкладок с использованием (12), (13) получим систему дифференциальных уравнений движения:

$$\begin{aligned} &\ddot{y}(M + M_1a_1^2 + M_2a_2^2 + I_1c_1^2 + I_2c_2^2) + y\left[k_1 + k_2 + k_3^2(c_1 - c_2)^2\right] + \\ &+ \varphi\left[k_1l_1 - k_2l_2 - k_3c_3^2(c_1 - c_2)(c_1l_1 - c_2l_2)\right] = \ddot{z}_1(I_1c_1^2 - M_1a_1b_1) + \ddot{z}_2(I_2c_2^2 - M_2a_2b_2) + \\ &+ z_1\left[k_1 - k_3c_3^2(c_1 - c_2)c_1z_1 + z_2\right] + k_2 + k_3c_3^2(c_1 - c_2)c_2z_2; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &\ddot{\varphi}I + \varphi\left[k_1l_1^2 + k_2l_2^2 + k_3c_3^2(c_1l_1 - c_2l_2)^2\right] + y\left[-k_1l_1 + k_2l_2 - k_3c_3^2(c_1 - c_2)(c_1l_1 - c_2l_2)\right] = \\ &= z_1\left[-k_1l_1 - c_1k_3c_3^2(c_1 - c_2)(c_1l_1 - c_2l_2)\right] + z_2\left[k_2l_2 + c_2k_3c_3^2(c_1l_1 - c_2l_2)\right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Коэффициенты уравнений (14), (15) приведены в табл. 1.

Структурная схема системы приведена на рис. 3а. Её характерной особенностью является то, что связи между парциальными системами носят упругий характер. В отличие от традиционных представлений условия «зануления» перекрестных связей определяются не только рычажными связями, которые формируются разнесением точек крепления пружин k_1 и k_2, но и параметрами рычажных механизмов c_1 и c_2.

Таблица 1

Коэффициенты системы дифференциальных уравнений в координатах *y*, φ

a_{11}	a_{12}
$(M+M_1a_1^2+M_2b_1^2+I_1c_1^2+I_2c_2^2)p^2+$ $+k_1+k_2+k_3c_3^2(c_1-c_2)^2$	$k_1l_1-k_2l_2-k_3c_3^2(c_1-c_2)(c_1l_1-c_2l_2)$
a_{21}	a_{22}
$k_1l_1-k_2l_2-k_3c_3^2(c_1-c_2)(c_1l_1-c_2l_2)$	$Ip^2+k_1l_1^2+k_2l_2^2+k_3c_3^2(c_1l_1-c_2l_2)^2$
Q_1	Q_2
$\ddot{z}_1(I_1c_1^2-M_1a_1b_1)+z_1\left[k_1-k_3c_3^2c_1(c_1-c_2)\right]+$ $+\ddot{z}_2\left[I_2c_2^2-M_2a_2b_2\right]+z_2\left[k_2+k_3c_3^2c_2(c_1-c_2)\right].$	$z_1\left[-k_1l_1-c_1k_3c_3^2(c_1l_1-c_2l_2)\right]+$ $+z_2\left[k_2l_2+c_2k_3c_3^2(c_1l_1-c_2l_2)\right]$

Примечание. Q_1, Q_2 – обобщенные силы по координатам *y* и φ.

II. Динамические свойства системы. Условия развязки колебаний между парциальными системами могут быть записаны в виде

$$k_1l_1-k_2l_2-(c_1-c_2)(c_1l_1-c_2l_2)k_3c_3^2=0, \quad (16)$$

откуда могут быть определены необходимые связи между параметрами системы, в частности, развязка парциальных систем может быть получена выбором жесткости пружины k_3:

$$k_3=\frac{k_1l_2-k_2l_2}{c_3(c_1-c_2)(c_1l_1-c_2l_2)}. \quad (17)$$

Поскольку k_3 является передаточной функцией W_0 (рис. 1), то при разработке способов и средств изменения динамического состояния вместо k_3 может быть апробирована другая передаточная функция, соответствующая той или иной дополнительно вводимой связи, в том числе и активной.

Зная обобщенные силы, можно по правилам Крамера [7] найти соотношения, необходимые для определения $\bar{y}$ и $\bar{\varphi}$:

$$\bar{y}=\frac{\bar{Q}_1a_{22}-\bar{Q}_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}; \quad (18)$$

$$\bar{\varphi}=\frac{\bar{Q}_2a_{11}-\bar{Q}_1a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}. \quad (19)$$

Используя табл. 1 и структурную схему (рис. 3), найдем, что (при $z_1=z_2=z$):

$$W_1(p)=\frac{\bar{y}}{\bar{z}}=\frac{\left[p^2(Ia^2+I_2c^2-M_1a_1b_1-M_2a_2b_2)+k_1+k_2+k_3c_3^2c_2(c_1-c_3)-k_2'c_3^2c_1(c_1-c_2)\right]\times}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\ldots$$

$$\ldots\frac{\times\left[Ip^2+k_1l_1^2+k_2l_2^2+k_3c_3^2(c_1l_1-c_2l_2)^2\right]-\left[k_2l_2-k_1l_1+k_3c_3^2(c_1-c_2)(c_1l_1-c_2l_2)\right]\times}{-//-}\ldots \quad (20)$$

$$\ldots\frac{\times\left[k_1l_1-k_2l_2-k_3c_3^2(c_1-c_2)(c_1l_1-c_2l_2)\right]}{-//-},$$

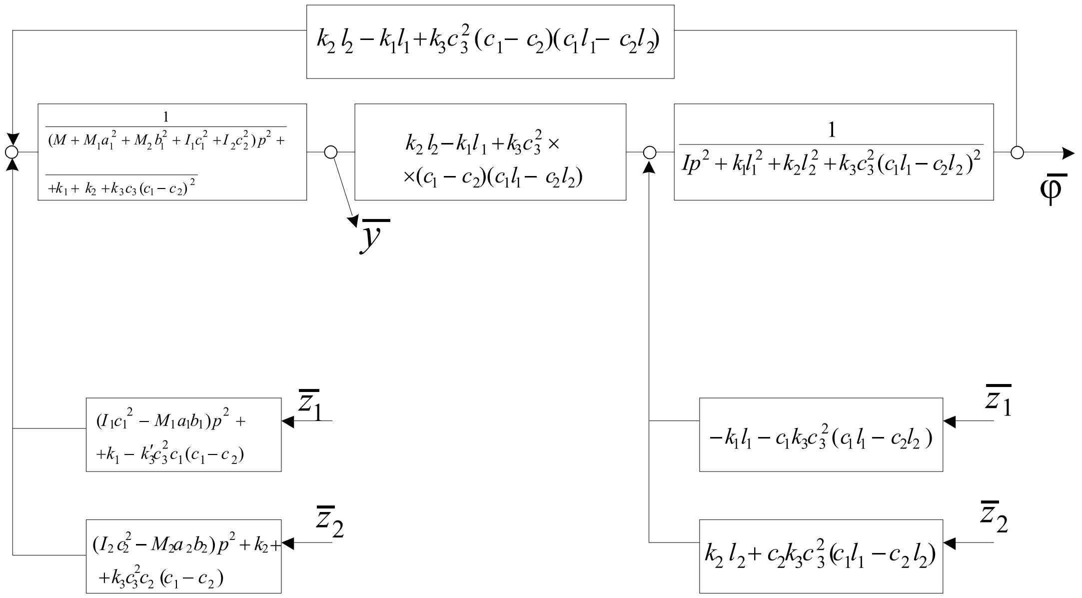
где $p=j\omega$ – комплексная переменная [8].

Аналогично можно получить передаточную функцию по координате φ от возмущения *z*. Отметим, что выбор системы координат изменяет представление о свойствах систем. Если использовать систему координат y_1 и y_2. В этом случае выражение для кинетической энергии примет вид:

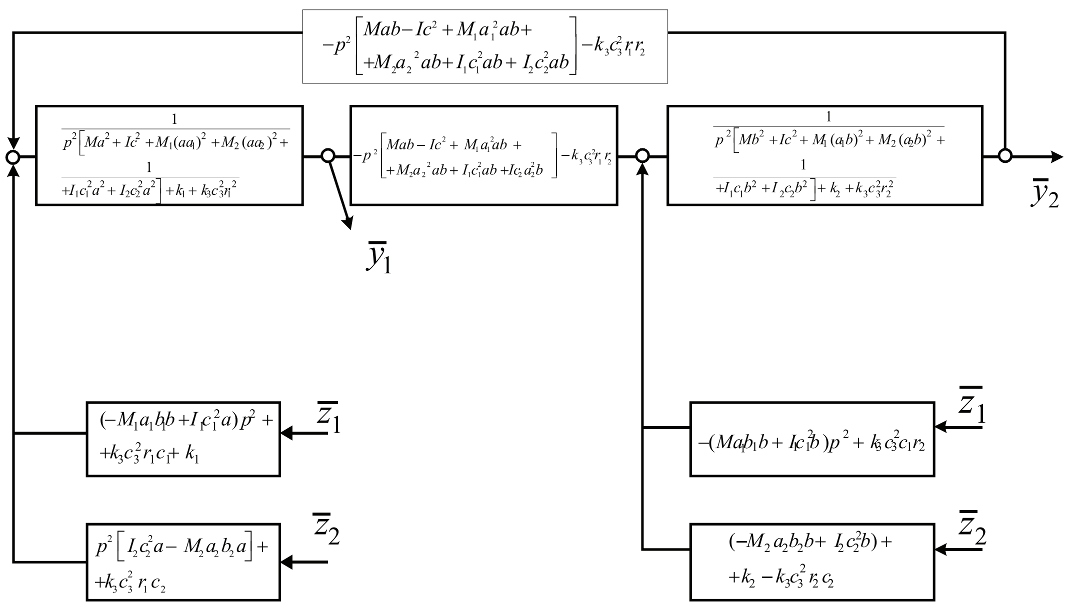
$$T=\frac{1}{2}M(\dot{y}_1a+\dot{y}_2b)^2+\frac{1}{2}Ic^2(\dot{y}_1-\dot{y}_2)^2+\frac{1}{2}M_1\left[a_1(\dot{y}_1a+\dot{y}_2b)+b_1\dot{z}_1\right]^2+$$
$$+\frac{1}{2}M_2\left[a_2(\dot{y}_1a_1+\dot{y}_2b)+b_2\dot{z}\right]_2^2+\frac{1}{2}I_1c_1^2\left[(\dot{y}_1a+\dot{y}_2b-\dot{z}_1)\right]^2+ \qquad (21)$$
$$+\frac{1}{2}I_2c_2^2(\dot{y}_1a+\dot{y}_2b-\dot{z}_2)^2,$$

а выражение для потенциальной энергии – соответственно:

$$\Pi=\frac{1}{2}k_1(y_1-z_1)+\frac{1}{2}k_2(y_2-z_2)+$$
$$+\frac{1}{2}k_3c_3^2\left[y(c_1-c_2)(y_1a+y_2b)-c(y_1-y_2)(c_1l_1-c_2l_2)+c_2z_2-c_1z_1\right]^2. \qquad (22)$$



а



б

Рис. 3. Структурные схемы системы:
а – в координатах y, φ; б – в координатах y_1, y_2

Используя (21)–(22), запишем дифференциальные уравнения движения в системе координат y_1 и y_2:

$$\begin{gathered}\ddot{y}_1\left\{Ma^2+Ic^2+M_1(aa_1)^2+M_2(a_2a)^2+I_1c_1^2a^2+I_2c_2^2a^2\right\}+\\+\ddot{y}_2(Mab-Ic^2+M_1a_1^2ab+M_2a_2^2ab+I_1c_1^2ab+I_2c_2^2ab)+y(k_1+k_3c_3^2r_1^2)+\\+y_2(k_3c_3^2r_1r_2)=z_1(k_1+k_3c_3^2r_1c_1+\ddot{z}_1(-M_1aa_1b_1+I_1c_1^2a)-k_3c_3^2r_2c_2z_2+\\+(-\ddot{z}_2M_2a_2a\,b_2+\ddot{z}I_2c_2^2a),\end{gathered} \qquad (23)$$

где $r_1=a(c_1-c_2)-c(c_1l_1-c_2l_2)$;

$r_2=b(c_1-c_2)+c(c_1l_1-c_2l_2)$;

$$\begin{gathered}\ddot{y}_2\left[Mb^2+Ic^2+M_1(a_1b)^2+M_2(a_2b)^2+I_1c_1^2b^2+I_2c_2^2b^2\right]+\\+\ddot{y}_1(Mab-Ic^2+M_1a_1^2ab+M_2a_2^2ab+I_1c_1^2ab+I_2c_2^2ab)+y_2(k_2+k_3c_3^2r_2^2)+y_1(k_3c_3^2r_1r_2y_1)=\\=-Ma_1b_1b\ddot{z}_1+I_1c_1^2b\ddot{z}_1+k_3c_3^2r_2c_1z_1+\ddot{z}_2(-M_2a_2bb_2+I_2c_2^2b)+z_2(k_2-k_3c_3^2r_2c_2).\end{gathered} \qquad (24)$$

Коэффициенты уравнений (23), (24) представлены в табл. 2.

Таблица 2

Коэффициенты системы дифференциальных уравнений в координатах y_1 и y_2

a_{11}	a_{12}
$p^2\begin{bmatrix}Ma^2+Ic^2+M_1(aa_1)^2+\\+M_2(aa_2)^2+I_1c_1^2a^2+I_2c_2^2a^2\end{bmatrix}+$ $+y_1(k_1+k_3c_3^2r_1^2)$	$p^2\begin{bmatrix}Mab-Ic^2+M_1a_1^2ab+\\+M_2a_2^2ab+I_1c_1^2ab+I_2c^2ab\end{bmatrix}+$ $+y_2(k_3c_3^2r_1r_2)$
a_{21}	a_{22}
$p^2\begin{bmatrix}Mab-Ic^2+M_1a_1^2ab+\\+M_2a_2^2ab+I_1c_1^2ab+I_2c^2ab\end{bmatrix}+k_3c_3^2r_1r_2$	$p^2\begin{bmatrix}Mb^2+Ic^2+M_1(a_1b)^2+\\+M_2(a_2b)^2+I_1c_1^2b^2+I_2c_2^2b^2\end{bmatrix}+$ $+k_2k_3c_3^2r_2^2$
Q_1'	Q_2'
$\bar{z}_1\begin{bmatrix}(-M_1aa_1b_1+I_1c_1^2a)p^2+\\+k_1+k_3c_3^2r_1c_1\end{bmatrix}+$ $+\bar{z}_2\left[(-M_2a_2b_2a+I_2c_2^2a)p^2-k_3c_3^2r_1c_2\right]$	$\bar{z}_1\begin{bmatrix}(-M_1a_1b_1b+I_1c_1^2b)p^2+\\+k_3c_3^2r_2c_1\end{bmatrix}+$ $+\bar{z}_2\left[(-M_2a_2b_2b+I_2c_2^2b)p^2+k_2-k_3c_3^2r_2c_2\right]$

П р и м е ч а н и е : Q_1', Q_2' – обобщенные силы по координатам и соответственно.

Структурная схема системы в координатах y_1 и y_2 приведена на рис. 3б. Анализ показывает, что рычажные связи существенным образом меняют связи между парциальными системами. Кроме того, передача внешних воздействий идет через механические цепи с формированием дополнительных инерционных сил, которые вносят свои коррективы в динамику взаимодействия звеньев. При этом связи между парциальными системами носят инерционно-упругий характер.

Из анализа структурной схемы системы в координатах y_1 и y_2 (рис. 3б) следует, что в системе возможно «зануление» связей между парциальными системами y_1 и y_2 на частоте

$$\begin{gathered}\omega^2=\frac{k_3c_3^2\cdot r_1r_2}{Mab-Ic^2+M_1a_1^2ab+M_2a_2^2ab+I_1c_1^2ab+I_2c_2^2ab}=\\=\frac{k_3c_3^2r_1r_2}{ab(M+M_1a^2+M_2a^2+I_1c_1^2+I_2c_2^2)-Ic^2}.\end{gathered} \qquad (25)$$

Что касается общего вида передаточной функции ($y_1 \leftrightarrow z$), то при $z_1 = z_2$ получим

$$W_1(p) = \frac{\overline{y}_1}{\overline{z}} = \frac{d_1 p^4 + d_2 p^2 + d_3}{n_1 p^4 + n_2 p^2 + n_3}, \quad (26)$$

где коэффициенты d_1–d_3, n_1–n_3 определяются параметрами системы и коэффициентами уравнений (23), (24).

Передаточная функция $W_2(p) = \frac{\overline{y}_2}{\overline{z}_2}$ имеет такой же вид, как и (25), однако, коэффициенты числителя будут другими. Для оценки устойчивости системы необходимо исследовать характеристическое уравнение (знаменатель (26)), например, в соответствии с критериями Рауса-Гурвица [8]. Для получения частот собственных колебаний решается характеристическо е уравнение, которое в данном случае сводится к биквадратному частотному уравнению. В общем случае корни биквадратного уравнения будут действительными положительными числами. Отметим, что числитель и знаменатель передаточной функции имеют один порядок; что предполагаются следующие особенности системы:

при $p \to 0$ $$\underset{p\to 0}{W_1(p)} = \frac{d_3}{n_3}; \quad \underset{p\to 0}{W_2(p)} = \frac{d_3'}{n_3'}, \quad (27)$$

где d_3' и n_3' – коэффициенты, определяемые так же как n_3 и d_3.

В свою очередь,

при $p \to \infty$ $$\underset{p\to \infty}{W_1(p)} = \frac{d_1}{n_1}; \quad \underset{p\to \infty}{W_2(p)} = \frac{d_1'}{n_1'}. \quad (28)$$

Поскольку частотное уравнение числителя передаточной функции имеет 4-й порядок, то можно ожидать в системе координат y_1 и y_2 появления двух динамических режимов по каждой координате. При определенных условиях можно полагать выполнение соотношения (порядки частотных уравнений числителя и знаменателя совпадают): $\overline{y}_1 = \overline{y}_2$, что приводит к специфичному виду движения объекта защиты при отсутствии угловых колебаний ($\varphi = 0$).

III. Особенности динамических свойств системы

Рассмотрим особенности динамических свойств подвески (рис. 1) в обобщенных координат y, φ. Воспользуемся данными из табл. 1 и введем некоторые обозначения. Пусть

$$a_{11} = \alpha_1 p^2 + \alpha_2; \quad a_{12} = \alpha_{21} = \alpha_3;$$
$$a_{22} = Ip^2 + \alpha_4; \quad \overline{Q}_1 = (\alpha_5 p^2 + \alpha_6)\overline{z};$$
$$\overline{Q}_2 = \alpha_7 \overline{z}$$

(при этом $z_1 = z_2 = z$). После некоторых преобразований найдем, что

$$\alpha_1 = M + M_1 a_1^2 + M_2 b_1^2 + I_1 c_1^2 + I_2 c_2^2;$$
$$\alpha_2 = k_1 + k_2 + k_3 c_3^2 (c_1 - c_2)^2;$$
$$\alpha_3 = k_1 l_1 + k_2 l_2 + k_3 c_3^2 (c_1 - c_2)(c_1 l_1 - c_2 l_2);$$
$$\alpha_4 = k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 + k_3 c_3^2 (c_1 l_1 - c_2 l_2)^2;$$
$$\alpha_5 = I_1 c_1^2 + I_2 c_2^2 - M_1 a_1 b_1 - M_2 a_2 b_2;$$
$$\alpha_6 = k_1 + k_2 + k_3 c_3^2 (c_1^2 - c_2^2); \quad \alpha_7 = -\alpha_3.$$

Числитель (26) можно привести к виду

$$(\alpha_5 p^2 + \alpha_6)(Ip^2 + \alpha_4) - \alpha_3 \alpha_7 = p^4 \alpha_5 I + p^2(\alpha_6 I + \alpha_4 \alpha_5) + \alpha_4 \alpha_6 + \alpha_3^2, \quad (29)$$

откуда

$$d_1 = \alpha_5 I, \quad d_2 = \alpha_6 I + \alpha_4 \alpha_5,$$
$$d_3 = \alpha_4 \alpha_6 + \alpha_3^2.$$

В свою очередь, знаменатель (26) принимает форму

$$(\alpha_1 p^2 + \alpha_2)(Ip^2 + \alpha_4) - \alpha_3^2, \quad (30)$$

тогда

$$n_1 = \alpha_1 I, \quad n_2 = \alpha_2 I + \alpha_1 \alpha_2,$$
$$n_3 = \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_3^2.$$

Из характеристического уравнения (30) можно найти граничное условие устойчивости по Раусу-Гурвицу [8]:

$$\alpha_3^2 = \alpha_2 \alpha_4, ... \quad (31)$$

что определяет возможность появления в системе циклической координаты. В общем случае рассматриваемая система может иметь два действительных положительных корня, что соответствует значениям двух частот собственных колебаний. На этих частотах амплитудно-частотная характеристика имеет резонансные пики (рис. 4). Однако система может иметь и комплексно-сопряженные корни, учитывая возможность большой вариативности.

Выбор параметров системы существенно влияет на вид амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) системы. На рис 4а приведена АЧХ системы по координате y, график зависимости соответствует типовым проявлениям свойств механических колебательных структур с устройствами преобразования движения в первом каскаде. В качестве настроечного параметра выбрана величина жесткости k_3 упругого элемента, соединяющего рычаги A_1A_2 и B_1B_2 (рис. 1). Дальнейшее увеличение жесткости

k_3 меняет характер расположения частот динамического гашения относительно частот собственных колебаний. На рис. 4а приведена зависимость, отражающая условие нахождения режима динамического гашения при частоте меньшей, чем первая частота собственных колебаний. При больших значениях k_3 АЧХ может иметь вид, при котором на высоких частотах система практически не «запирается» и имеет две частоты собственных колебаний (рис. 4 в,г). Общим для приведенных АЧХ является наличие двух частот динамического гашения и «запирания» системы на высоких частотах. Однако в частных случаях при определенных условиях система может иметь одну частоту динамического гашения или даже не иметь таковой.

Амплитудно-частотные характеристики системы по координате φ отличаются от АЧХ по координате y тем, что режим динамического гашения будет только один.

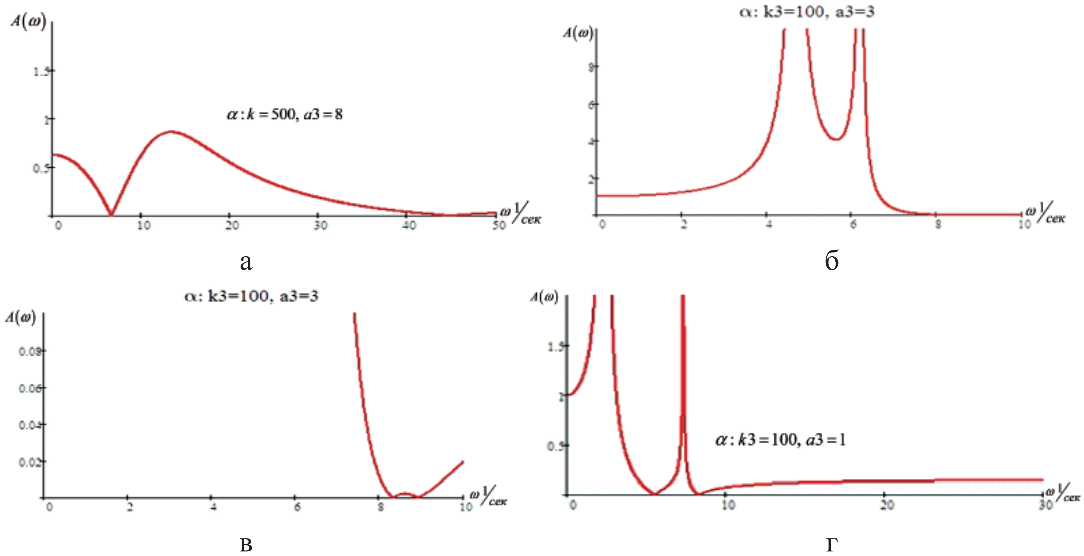


Рис. 4. Амплитудно-частотная характеристика системы по у:
а – с двумя режимами динамического гашения; б – при динамическом гашении до первого резонанса;
в – частоты динамического гашения находятся за пределами резонансных частот;
г – увеличенный фрагмент АЧХ

Для движения по координате φ можно записать [7]

$$\bar{\varphi} = \frac{Q_2 a_{11} - Q_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}. \qquad (32)$$

Найдем частотное уравнение числителя (32):

$$-\alpha_3(\alpha_1 p^2 + \alpha_2) - (\alpha_5 p^2 + \alpha_6)\alpha_3 = -\alpha_3\left[p^2(\alpha_1 + \alpha_1) + \alpha_3(\alpha_2 + \alpha_6)\right]. \qquad (33)$$

Поэтому для координаты φ в (26)

$$d_2' = -\alpha_3(\alpha_1 + \alpha_5), \quad d_3' = -\alpha_3(\alpha_2 + \alpha_6),$$

что касается коэффициентов характеристического уравнения, то

$$n_1 = n_1', n_2 = n_2', n_3 = n_3'.$$

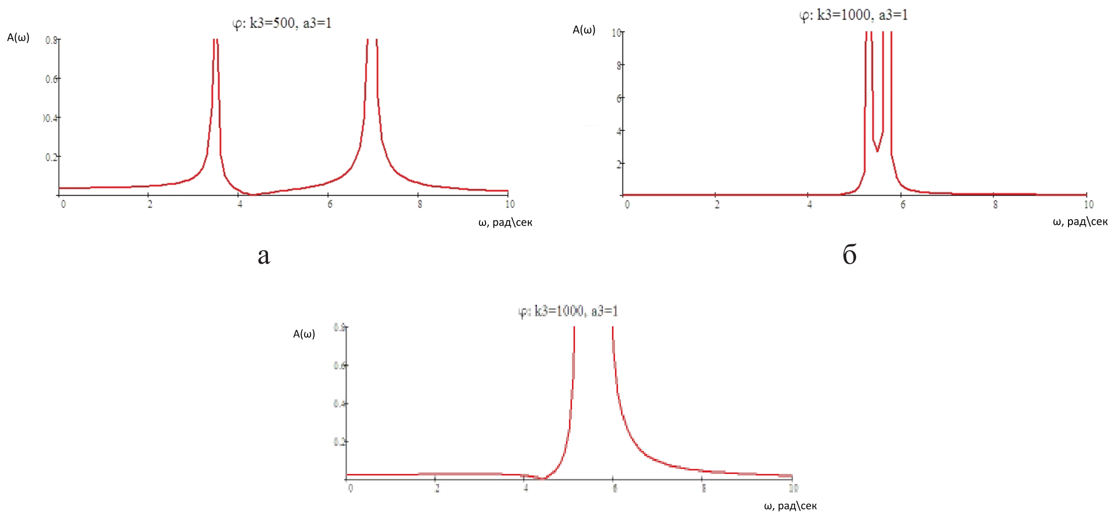
Частота динамического гашения по координате φ определится значением

$$\omega^2_{\text{дин }\varphi} = \frac{\alpha_2 + \alpha_6}{\alpha_1 + \alpha_5} = \frac{k_1 + k_2 + k_3 c_3^2 (c_1 - c_2)^2 +}{M + M_1 a_1^2 + M_2 b_1^2 + I_1 c_1^2 +} = \ldots$$

$$\ldots \frac{+k_1 + k_2 + k_3 c_3^2 (c_1^2 - c_2^2)}{+I_2 c_2^2 + I_1 c_1^2 + I_2 c_2^2 - M_1 a_1 b_1 - M_2 a_2 b_2} \qquad (34)$$

$$= \frac{2(k + k) + kc(2c + 2c - 2cc)}{2(I_1 c_1^2 + I_2 c_2^2) + M + M_1(a_1^2 - a_1 b_1) + M_2(b_1^2 - a_2 b_2)}.$$

Различные виды АЧХ системы по φ при изменениях k_3 приведены на рис. 5 (а, б, в), где рис. 5*а* соответствует случаю нахождения режима динамического гашения между двумя резонансными частотами; случай б – соответствует режиму динамического гашения до первого резонанса. На рис. 5в показана в увеличенном масштабе зона динамического гашения.



а б

в

Рис. 5. Амплитудно-частотные характеристики системы по φ

При рассмотрении системы в координатах y_1 и y_2, используя табл. 2, запишем:

$$a_{11} = \beta_1 p^2 + \beta_2;$$

$$a_{12} = a_{21} = \beta_3 p^2 + \beta_4;$$

$$a_{22} = \beta_5 p^2 + \beta_6;$$

$$Q_1' = \beta_7 p^2 + \beta_8; \quad Q_2' = \beta_9 p^2 + \beta_{10},$$

где

$$\beta_1 = Ma^2 + M_1(aa_1)^2 + M_2(bb_1)^2 + I_1c_1^2a^2 + I_2c_2^2a^2;$$

$$\beta_2 = k_1 + k_3c_3^2 r_1^2;$$

$$\beta_3 = Mab - Ic^2 + ab(M_1a_1^2 + M_2a_2^2 + I_1c_1^2 + I_2c_2^2);$$

$$\beta_4 = k_3c_3^2 r_1 r_2;$$

$$\beta_5 = Mb^2 + Ic^2 + b^2(M_1a_1^2 + M_2a_2^2 + I_1c_1^2 + I_2c_2^2);$$

$$\beta_6 = k_2k_3c_3^2 r_2^2;$$

$$\beta_7 = a(I_1c_1^2 + I_2c_2^2 - M_1a_1b_1 - M_2a_2b_2);$$

$$\beta_8 = k_1 + k_3c_3^2 r_1(c_1 - c_2);$$

$$\beta_9 = b(I_1c_1^2 + I_2c_2^2 - M_1a_1b_1 - M_2a_2b_2);$$

$$\beta_{10} = k_2 + k_3c_3^2 r_2(c_1 - c_2). \qquad (35)$$

Передаточная функция при входе z и выходе y_1 имеет вид

$$\overline{W}_1(p) = \frac{\overline{y}_1}{\overline{z}} = \frac{(\beta_7 p^2 + \beta_8)(\beta_5 p^2 + \beta_6) - (\beta_9 p^2 + \beta_{10})(\beta_3 p^2 + \beta_4)}{(\beta_1 p^2 + \beta_2)(\beta_5 p^2 + \beta_6) - (\beta_3 p^2 + \beta_4)^2} \dots. \qquad (36)$$

Частотное уравнение числителя (36) можно записать

$$p^4(\beta_5\beta_7 + \beta_9\beta_3) + p^2(\beta_5\beta_8 + \beta_6\beta_7 - \beta_3\beta_{10} - \beta_4\beta_9) + \beta_6\beta_8 - \beta_4\beta_{10} = 0, \qquad (37)$$

откуда найдем

$$d_1'' = \beta_5\beta_7 + \beta_3\beta_9;$$

$$d_2'' = \beta_5\beta_8 + \beta_6\beta_7 - \beta_3\beta_{10} - \beta_4\beta_9;$$

$$d_3'' = \beta_6\beta_8 - \beta_4\beta_{10}. \qquad (38)$$

Отметим, что характеристическое уравнение в (36) остается таким же, как и в (26). Для координаты y_2 частотное уравнение числителя (36) имеет вид

$$\begin{gathered} p^4(\beta_1\beta_9 - \beta_3\beta_7) + p^2(\beta_1\beta_{10} + \beta_2\beta_9 - \beta_3\beta_8 - \beta_4\beta_7) + \\ + \beta_2\beta_{10} - \beta_4\beta_8 = 0, \end{gathered} \qquad (39)$$

откуда

$$d_1''' = \beta_1\beta_9 - \beta_3\beta_7;$$

$$d_2''' = \beta_1\beta_{10} + \beta_2\beta_9 - \beta_3\beta_8 - \beta_4\beta_7;$$

$$d_3''' = \beta_2\beta_{10} - \beta_4\beta_8. \qquad (40)$$

Исследуя уравнение числителя (36), можно получить самые разнообразные частотные характеристики с возможностями двух, одного или отсутствия режимов динамического гашения; можно получить условия $y_1 - y_2 = 0$, то есть режим, при котором угол поворота объекта $\varphi = 0$.

Заключение

Таким образом, введение рычажных связей в схему транспортной подвески может существенно расширить спектр динамических свойств подвески и в случае построения системы управления параметрами системы обеспечить режимы частичного или полного гашения на определенных частотах воздействий со стороны основания. Наиболее важным в предлагаемом подходе является то обстоятельство, что в систему становится возможным вводить «настройку» через передаточную функцию W_0, показанную на рис. 1. В простейших случаях это может обычный упругий элемент. Однако свойства системы могут существенно изменяться и при введении элементов диссипативного характера или при введении устройств для преобразования движения в виде некоторых механизмов.

Список литературы

1. Хоменко А.П. Динамика и управление в задачах виброзащиты и виброизоляции подвижных объектов. – Иркутск: ИГУ. 2000. – 293 с.

2. Ротенберг Р.В. Подвеска автомобиля. – М.: Машиностроение, 1972. – 372 с.

3. Елисеев С.В., Волков Л.Н., Кухаренко В.П. Динамика механических систем с дополнительными связями. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-е, 1990. – 312 с.

4. Елисеев С.В., Белокобыльский С.В., Упырь Р.Ю., Гозбенко В.Е. Рычажные связи в задачах динамики механических колебательных систем. Теоретические аспекты. Иркутский гос. ун-т путей сообщения. – Иркутск, 2009. – 159 с. – Рус. Деп. в ВИНИТИ 27.11.09 № 737-В 2009.

5. Ермошенко Ю.В. Управление вибрационным состоянием в задачах виброзащиты и виброизоляции: дис. ... канд. техн. наук. – Иркутск: ИрГУПС, 2002. – 185 с.

6. Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Сочленения звеньев в динамике механических колебательных систем. – Иркутск.: ИрГУПС. 2012. – 152 с.

7. Дружинский И.А. Механические цепи. – М.: Машиностроение. 1977. – 240 с.

8. Ким П.Д. Теория автоматического управления в 2-х томах. Т.1. Линейные системы. – М.: Физматгиз, 2003. – 288 с.