УДК 59.17

НЕКОТОРЫЕ ЦИКЛЫ НА ГРАФАХ И КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОДНОГО ИЗ НИХ

Белаш А.Н.

ФГАОУ ВПО «Северо-Кавказский федеральный университет», Ставрополь, email: info@ncstu.ru

Приведен обзор существующих циклов на графах. Дано обоснование новому циклу и приведен критерий его существования.

Ключевые слова: циклы на графах, цикл Гамильтона, цикл Эйлера, цикл Белаша, теория графов

SOME CYCLES ON THE GRAPH AND CRITERIA FOR THE EXISTENCE OF ONE OF THEM

Belash A.N.

North-Caucasian Federal University, Stavropol, email: info@ncstu.ru

The review of the existing cycles in graphs. The substantiation of a new cycle and a criterion of its existence.

Keywords: cycles in graphs, cycle Hamilton, cycle Euler, cycle Belash, graph theory

На сегодняшний день известны два обхода графа с возвращением в ту вершину, из которой они были начаты:

1) цикл Эйлера (обход графа по всем ребрам с возвращением в исходную вершину, причем каждое ребро должно быть пройдено только один раз) [1, 2];

2) цикл Гамильтона (обход графа по всем вершинам с возвращением в исходную вершину, причем каждая вершина должна быть пройдена только один раз) [1, 2].

Однако ни в одной из известных работ, относящихся к обходам графа с возвращением в исходную вершину, не встречается описание обхода плоской укладки графа по всем внутренним граням с возвращением в исходную вершину.

Будем говорить, что граф укладывается на поверхности S, если его можно так нарисовать на S, что никакие два его ребра не пересекаются. Граф называется планарным, если его можно уложить на плоскости; плоский граф – это граф, уже уложенный на плоскости. Области, определяемые плоским графом, назовем его внутренними гранями [1].

На сегодняшний день известны два обхода графа с возвращением в ту вершину, из которой они были начаты:

1) цикл Эйлера (обход графа по всем ребрам с возвращением в исходную вершину, причем каждое ребро должно быть пройдено только один раз) [1, 2];

2) цикл Гамильтона (обход графа по всем вершинам с возвращением в исходную вершину, причем каждая вершина должна быть пройдена только один раз) [1, 2].

Однако ни в одной из известных работ, относящихся к обходам графа с возвращением в исходную вершину, не встречается описание обхода плоской укладки графа по всем внутренним граням с возвращением в исходную вершину.

Под целью исследования будем понимать четкое описание нового цикла обхода с позиции плоских графов и формализацию основных критериев его существования.

В качестве методов исследования будем использовать основные методы работы с графами. Для этого последовательно зададим сам граф и сформулируем теорему с доказательством.

Пусть представлен на плоскости S плоский граф $G = (V, E)$, где V – множество вершин графа G, E – множество ребер графа G. Далее обозначим: – вершина графа G, $i=\overline{1,|V|}$, $v_i \in V$; e_j – ребро графа G, $j=\overline{1,|E|}$, $e_j \in E$.

Теорема 1.

Если в графе для пары вершин существует $2n$, $n \in N$, количество цепей, причем каждое ребро в них проходит через ранее не пройденную грань, то такой граф будет содержать цикл Белаша.

Доказательство

Возьмем на графе G две вершины $v_i \in V$ и $v_j \in V$. Допустим между этими вершинами можно сформировать четное число цепей, каждая из которых будет содержать ребро, принадлежащее ранее не пройденной грани. Тогда в этом случае половина цепей может быть использована на путь от v_i к v_j, а вторая половина цепей может быть использована для прохождения пути обратно.

Следствие 1. В планарном графе $G = (V, E)$ на котором существует цикл Белаша присутствует подграф $G' = (V', E')$ с циклом Эйлера, число ребер которого равно числу внутренних граней графа G.

Доказательство

Каждое ребро в G' будет начинать или заканчивать одну из цепей, необходимую для существования цикла Белаша. Поскольку число таких цепей является четным числом, то и степень каждой вершины в графе G' будет четным, в связи с этим будет присутствовать цикл Эйлера.

Вывод

Таким образом в статье был предложен критерий для существования цикла Белаша в планарном графе $G = (V, E)$.

Список литературы

1. Носов В.А. Комбинаторика и теория графов. – М.: Мир, 1989. – С. 101–315.