

УДК 62-531.7

## МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ В МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Каимов Е.В., Елисеев А.В.

*ФГБОУ ВПО «Иркутский государственный университет путей сообщения», Иркутск,  
e-mail: eliseev\_s@inbox.ru*

Обсуждается метод определения динамических реакций в механических колебательных системах, содержащих типовые элементы в виде упругих и массоинерционных звеньев. Разработана методическая основа построения математических моделей виброзащитных систем в виде эквивалентных в динамическом отношении структурных схем систем автоматического управления. Показано, что при выбранном объекте защиты структурная схема системы при заданных внешних воздействиях может быть приведена к стандартному виду, в рамках которого в прямой цепи объект защиты представляется интегрирующим звеном второго порядка. Динамическая реакция определяется параметрами отрицательной обратной связи относительно базового звена. Рассмотрены примеры определения динамических реакций в системе с двумя степенями свободы.

**Ключевые слова:** динамические реакции, виброзащитные системы, механические колебательные системы, структурные схемы, передаточные функции

## METHOD OF DEFINITION OF DYNAMICAL REACTIONS IN MECHANICAL OSCILLATION SYSTEMS

Kaimov E.V., Eliseev A.V.

*FSBEO HPE «Irkutsk State University of Means of Communications», Irkutsk,  
e-mail: eliseev\_s@inbox.ru*

The method of definition of dynamic reactions in the mechanical oscillation systems containing standard elements in the form of elastic and mass-inertial links is discussed. The methodical basis of creation of mathematical models of vibroprotection systems in the form of block diagrams of automatic control systems equivalent in the dynamic relation is developed. It is shown that at the chosen object of protection the block diagram of system at the set external influences can be provided to a standard look within which in a direct chain the object of protection is represented an integrating link of the second order. Dynamic reaction is defined by parameters of negative feedback of rather basic link. Examples of definition of dynamic reactions in system with two degrees of freedom are reviewed.

**Keywords:** dynamical reactions, vibroprotection systems, mechanical oscillation systems, structural schemes, transfer functions

Вибрационные воздействия создают напряженное динамическое состояние для элементов механических колебательных систем в их взаимодействиях между собой и с опорными поверхностями, что делает необходимым развитие методов оценки усилий в контактах [1]. Многие вопросы определения динамических реакций рассматриваются в соответствующих разделах теории механизмов и машин, теоретической механики, прикладной теории колебаний. Вместе с тем, динамические взаимодействия элементов колебательных систем еще не получили должного освещения в современной научной литературе. В частности, это относится к виброзащитным системам, состоящим, как правило, из нескольких массоинерционных элементов, входящих в соединения с упругими, диссипативными

звеньями и устройствами для преобразования движения [2, 3].

Общие положения. Постановка задачи исследования. В статье динамические реакции рассматриваются как силовые взаимодействия между элементами виброзащитных систем, а также – с опорными поверхностями. При этом предполагается, что движение механической колебательной системы возникает за счет внешних периодических сил относительно положения статического равновесия. Последнее предопределяет существование полной реакции, которая является суммой двух составляющих: статической и динамической. Раздельное рассмотрение каждой из составляющих представляет интерес при решении задач взаимодействия элементов системы при недерживающих связях.

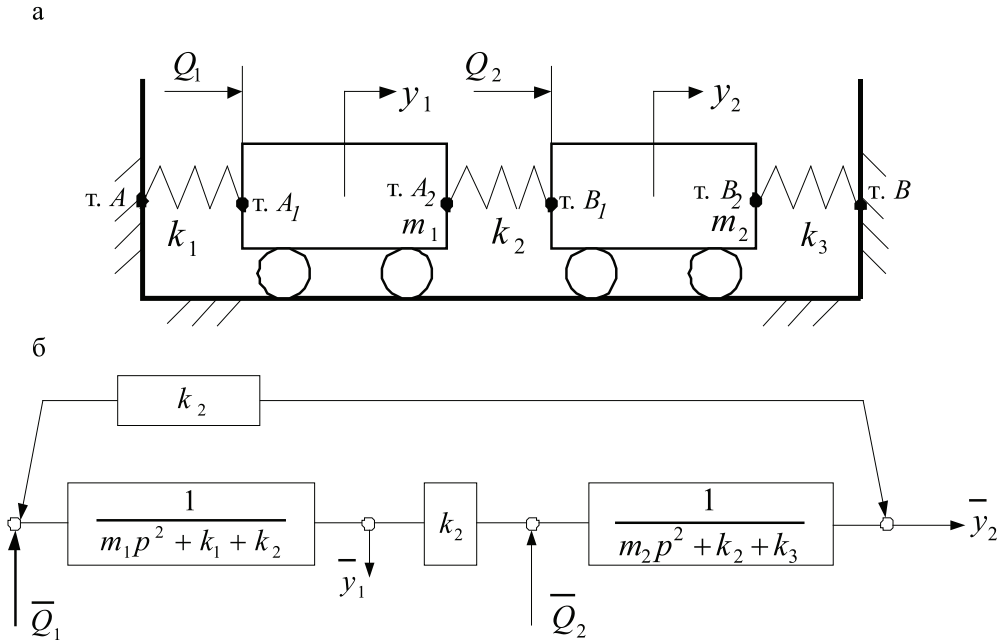


Рис. 1. Расчетная (а) и структурная (б) схемы виброзащитной системы с двумя степенями свободы

Метод определения динамических реакций основан на использовании принципа Даламбера с последующим применением структурных подходов, изложенных в работах [1, 3]. На рис. 1а, б представлены расчетная (рис. 1а) и структурная (рис. 1б) схемы механической колебательной системы с двумя степенями свободы.

Система дифференциальных уравнений движения в координатах  $y_1$  и  $y_2$ , связанных с неподвижным базисом, имеет вид:

$$m_1 \ddot{y}_1 + y_1 (k_1 + k_2) - k_2 y_2 = Q_1, \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + y_2 (k_2 + k_3) - k_2 y_1 = Q_2. \quad (2)$$

Используя преобразования Лапласа, можно (1) и (2) привести к форме:

$$m_1 p^2 \cdot \bar{y}_1 + \left[ \bar{y}_1 \left( k_1 + \frac{k_2 (m_2 p^2 + k_3)}{m_2 p^2 + k_2 + k_3} \right) \right] = \bar{Q}_1 + \frac{\bar{Q}_2 k_2}{m_2 p^2 + k_2 + k_3}, \quad (3)$$

где  $p = j\omega$  ( $j = \sqrt{-1}$ ) – комплексная переменная [1];  $y_1, y_2, y_3, Q_1, Q_2$  – изображение величин по Лапласу.

В выражении (3) в квадратных скобках обозначена динамическая реакция, которая может быть отнесена к т. А,  $A_1$ , что соответ-

ствует определению динамической реакции связи, вытекающему из принципа Даламбера.

Задача исследования заключается в развитии и обосновании возможностей методов определения динамических реакций в системах колебательного типа.

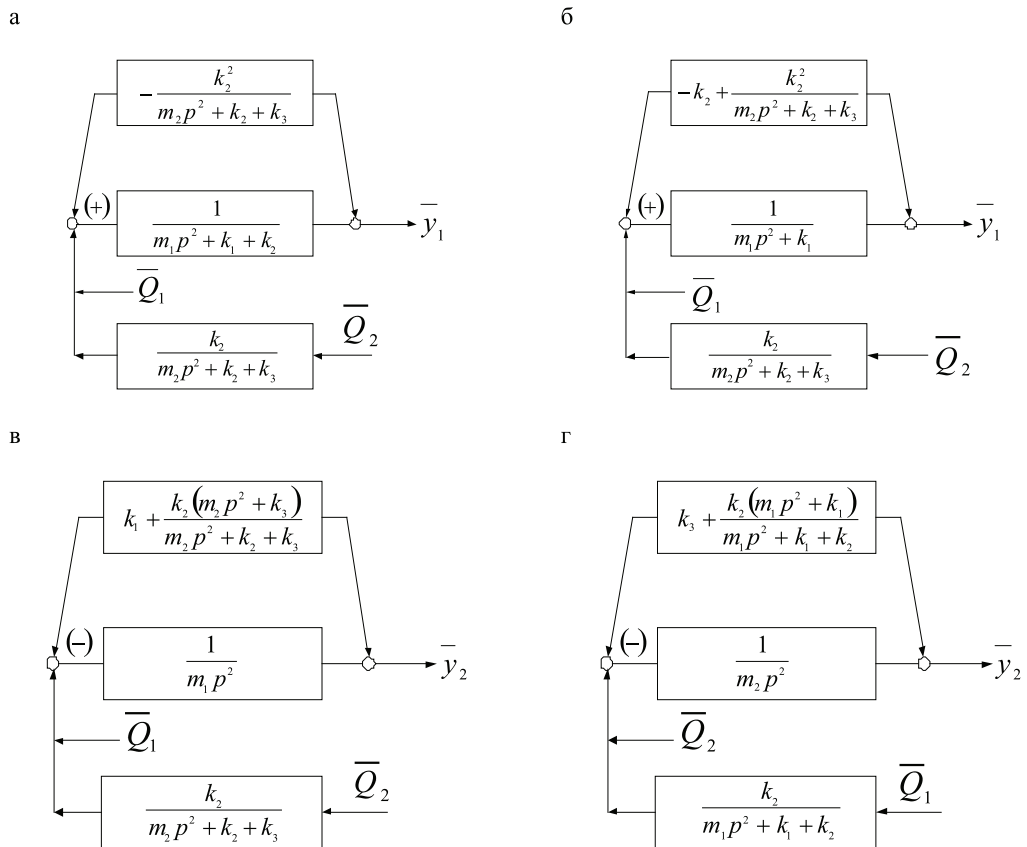


Рис. 2. Преобразования структурных схем:

а – объект защиты  $m_1$ ; б – объект защиты  $m_1$ , частичная система  $m_1, k_1$ ; в – объект защиты  $m_1$ , отрицательная обратная связь; г – объект защиты  $m_2$ , отрицательная обратная связь

**II. Построение математических моделей для определения динамических реакций.** Основной структурного подхода является, как показано на рис. 1б, сопоставление механической колебательной системе эквивалентной в динамическом отношении структурной схемы системы автоматического управления с соответствующими входными и выходными сигналами. На рис. 2а представлена последовательность преобразований, которая отражает основные особенности динамических реакций. Структурная схема, соответствующая системе на рис. 1а, может быть путем последовательных преобразований (от схемы на рис. 2а до рис. 2в) приведена к виду, когда в прямой цепи остается объект защиты с массой  $m_1$ . На структурной схеме (рис. 2в) объекту защиты соответствует базовое звено с передаточной функцией интегрирующего звена второго порядка. Что касается

динамической реакции в т.т.  $A$  и  $A_1$ , то она определяется выражением:

$$|\bar{R}_A| = |\bar{R}_{A_1}| = k_1 \bar{y}_1, \quad (4)$$

где  $\bar{y}_1$  определяется из структурной схемы на рис. 1б.

Передаточная функция системы при силовом возмущении в виде сосредоточенной гармонической силы  $Q_1$  имеет вид:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{Q_1} = \frac{m_2 p^2 + k_2 + k_3}{A_0}, \quad (5)$$

где  $A_0$  является частотным уравнением системы:

$$A_0 = (m_1 p^2 + k_1 + k_2) \cdot (m_2 p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2. \quad (6)$$

После преобразований (5) и (6) можно получить:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{Q_1} = \frac{1}{m_1 p^2 + k_1 + k_2 - \frac{k_2^2}{m_2 p^2 + k_2 + k_3}}, \quad (7)$$

что предопределяет структуру системы, приведенную на рис. 2а, б, в.

В соответствии с полученными соотношениями и структурными схемами, найдем, что  $|\bar{R}_A| = |\bar{R}_{A_1}| = k_1 y_1 = k_1 \bar{y}_1$  или

$$|\bar{R}_A| = \frac{k_1 \bar{Q}_1 (m_2 p^2 + k_2 + k_3)}{A_0}. \quad (8)$$

От выражения (8) легко перейти к амплитудно-частотной характеристике, используя передаточную функцию:

$$W_{R_A} = \frac{\bar{R}_A}{\bar{Q}_1} = \frac{k_1 (m_2 p^2 + k_2 + k_3)}{A_0}. \quad (9)$$

Физический смысл обратной связи на структурной схеме по рис. 2в состоит в том, что величина (или коэффициент усиления) обратной связи соответствует приведенной жесткости обобщенной пружины:

$$k_{np} = k_1 + \frac{(m_2 p^2 + k_3) k_2}{m_2 p^2 + k_2 + k_3}. \quad (10)$$

Если умножить  $k_{np}$  на  $y_1$ , то можно получить полную динамическую реакцию на элементе  $m_1$ . Одна её часть ( $R_{A_1}$ ) определяется жесткостью  $k_1$  пружины, а вторая ( $R_{A_2}$ ) – формируется динамическим взаимодействием между массами  $m_1$  и  $m_2$ . Отметим, что вышеприведенные определе-

ния предполагают действие только одной силы  $Q_1 \neq 0$  (принимается, что  $Q_2 = 0$ ). Если  $Q_2 \neq 0$ , то в рассматриваемой задаче необходимо учитывать два входных сигнала, а динамические реакции определяются на основе метода суперпозиции. При  $Q_1 \neq 0$  ( $Q_2 = 0$ ) реакция в точке  $A_2$  имеет вид:

$$|R_{A_2}| = \frac{(m_2 p^2 + k_3) \cdot k_2 \cdot Q_1}{(m_2 p^2 + k_2 + k_3) \cdot A_0}. \quad (11)$$

Полная динамическая реакция на объекте массой  $m_2$  определится:

$$\bar{R}_{m_2} = k_{np} \cdot \bar{y}_1. \quad (12)$$

Аналогичным образом могут быть найдены:

$$|\bar{R}_B| = |\bar{R}_{B_1}| = k_3 \cdot \bar{y}_2 = \frac{k_2 \cdot Q_1}{A_0}. \quad (13)$$

В свою очередь, полная динамическая реакция на массе  $m_2$  в соответствии со структурной схемой на рис. 2г примет вид:

$$|\bar{R}_{m_2}| = k_3 \bar{y}_2 + \frac{k_2 \cdot Q_1}{A_0 \cdot (m_1 p^2 + k_1 + k_2)}. \quad (14)$$

$$|\bar{R}_{B_2}| = \frac{k_2 \cdot Q_1}{A_0 \cdot (m_1 p^2 + k_1 + k_2)}. \quad (15)$$

Передаточная функция при входе  $\bar{Q}_1$  и выходной полной динамической реакцией  $\bar{R}_{B_2}$  может быть записана:

$$W_{m_2}(p) = W_{B_2}(p) = \frac{\bar{R}_{m_2}}{\bar{Q}_1} = \frac{k_3 (m_1 p^2 + k_1 + k_2) + k_2^2}{A_0 (m_1 p^2 + k_1 + k_2)}. \quad (16)$$

### Заключение

1. Таким образом, динамические реакции в точках контакта (т.т.  $A, A_1, A_2$  и  $B, B_1, B_2$ ) могут быть найдены аналитически на основе предлагаемого метода. Суть метода заключается в том, что составляется структурная схема, которая преобразуется к определенному виду в соответствии с выбором объекта защиты (или объекта контроля динамического состояния при внешних воздействиях). Обратная цепь (или обратная связь) в таком случае по физическому смыслу соответствует приведенной жесткости обобщенной пружины. Полная динамическая реакция (т.  $A_2, B_2$ ) определяется с учетом приведенной жесткости и выбранных смещений по координатам  $y_1$  и  $y_2$ . Предлагаемые соотношения позволяют получить передаточные функции при известном входе внешней силы и выходе в виде динамической реакции.

2. Динамические реакции в наблюдаемых точках, в общем случае, будут различными.

3. При определении передаточных функций по динамическим реакциям может быть

отмечено появление эффекта дополнительно резонанса, что в физическом плане соответствует режиму динамического гашения колебаний по координате  $y_1$ . В этом случае координата  $y_1$  «обнуляется» при  $Q_1 \neq 0$ . Отметим также, что внешняя сила может переноситься из координаты  $y_1$  к координате  $y_2$ , реализуя эквивалентное преобразование.

*Исследования выполнены по гранту в рамках федеральной целевой программы «Научные и педагогические кадры инновационной России» на 2012 – 2013 гг. (мероприятие 1.3.2. – естественные науки) № 14.132.21.1362.*

### Список литературы

1. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б. Прикладные задачи структурной теории виброзащитных систем. – СПб: Политехника. – 2013. – 363 с.
2. Елисеев С.В., Хоменко А.П. Проблемы виброзащиты и виброизоляции технических объектов в работах Иркутской школы механиков // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2005. № 5. С. 6-26.
3. Елисеев С.В., Хоменко А.П., Логунов А.С. Динамический синтез в задачах построения систем защиты человека-оператора транспортных средств от вибраций и ударов // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2009. № 4. С. 64-74.