при этом

$$\max_{[0,\eta_0]}|\psi(\eta)| = m_2; \quad |G(\eta,\xi_1)| \le M_2.$$

Решение интегрального уравнения (19) будем искать в виде ряда $\tau(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k(\eta)$, для которого имеет место неравенство $|\tau(\eta)| \le m_2 \exp M_2 \eta_0$.

Таким образом, интегральное уравнение (19) (а также (18)), при выполнении условия (8), однозначно разрешимо.

Следовательно, задача (4), (6) имеет единственное решение вида (9), в котором τ(ξ) определяются из уравнений (17) и (19).

Отметим, что, если $A(x, y) = B(x, y) \equiv 0$, то условие (8) не выполняется. В этом случае уравнение (18) имеет вид

$$\tau(\eta) + \tau(\alpha(\eta)) = f(\eta) + \int_{\eta}^{\alpha(\eta)} \tau(\xi_1) H(\eta,\xi_1) d\xi_1; \quad (20)$$

$$H(\eta,\xi_1) = \left(\frac{\partial}{\partial\xi_1} - \frac{\partial}{\partial\eta_1}\right) R(\xi_1,\eta_1;\alpha(\eta),\eta)\Big|_{\xi_1=\eta_1}.$$

Так как интегральный оператор, стоящий в правой части равенства (20), вполне непрерывен, то, как показано в [3], функциональное уравнение (20) имеет единственное решение.

Таким образом, и в этом случае задача (4), (6) однозначно разрешима.

Теорема 1 для задачи (1), (3) доказана.

Отметим, что краевые задачи с отходом от характеристики для уравнения (1) изучены в [5].

Список литературы

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

2. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. – М.: Изд. АН СССР, 1959. – С. 164.

3. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – С. 448.

4. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – С. 301.

5. Алдашев С.А., Таскалиев А.К. Краевые задачи с отходом от характеристики для линейных гиперболических уравнений второго порядка // Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры: мат-лы IV Межд. научн. конф. (Актобе, АГУ Казахстан, 18-21 окт. 2006 г). – Актобе, 2009. – С. 36–41.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

Алдашев С.А., Жантлеуов К.К.

Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, email: aldash51mail.ru

В работе для линейных гиперболических уравнений в области с отходом от характеристики доказаны корректности задач Дирихле и Пуанкаре.

В теории уравнений частных производных гиперболического типа краевые задачи с данными на всей границе области служат примером некорректно поставленных задач [1, 2]. В данной работе для линейных гиперболических уравнений, в области с отходом от характеристики, доказаны корректности задач Дирихле и Пуанкаре.

п. 1. Постановка задач и результаты**.** Рассмотрим линейное гиперболическое уравнение

$$u_{xx} - u_{yy} + A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = 0. \quad (1)$$

Пусть AC: $y = x$, BC: $y = 1 - x$ характеристики уравнения (1), а AB – отрезок $0 \le x \le 1$ прямой $y = 0$.

Пусть далее $D \subset R^2$ – конечная область, ограниченная отрезком AB и при $y > 0$ – гладкой кривой Г: $y = \gamma(x)$ расположенная внутри характеристического треугольника ABC, $\gamma(0) = \gamma(1) = 0$.

В качестве задачи Дирихле и Пуанкаре рассмотрим следующие задачи

Задача 1. Найти в области D решение уравнения (1) из класса $C(\bar{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{AB} = \tau(x); \quad u|_{\Gamma} = \sigma(x) \quad (2)$$

или

$$u_t|_{AB} = \nu(x); \quad u|_{\Gamma} = \sigma(x), \quad (3)$$

где

$$\tau(x), \nu(x), \sigma(x), \phi(x) \in C^1(0 \le x \le 1) \cap C^2(0 < x < 1).$$

В характеристических координатах $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ уравнение (1) записывается следующим образом

$$u_{\xi\eta} + au_\xi + bu_\eta + cu = 0; \quad (4)$$

$$4a(\xi,\eta) = A + B, 4b(\xi,\eta) = A - B, 4c(\xi,\eta) = C, A, B \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D), C \in C(D).$$

При этом краевые условия (2) и (3) соответственно имеют вид

$$u(\eta, \eta) = \tau(\eta), u(\alpha(\eta), \eta) = g(\eta), 0 \le \eta \le 1, (5)$$

или

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\Big|_{\xi=\eta} = \nu(\eta); \quad 0 \le \eta \le \frac{1}{2};$$

$$u(\alpha(\eta),\eta)=g(\eta),\ 0\le\eta\le 1, \tag{6}$$

где $g(\eta)=\sigma\left(\frac{\eta}{2}+\frac{\alpha(\eta)}{2}\right)$, а функция $\xi=\alpha(\eta)$ является решением уравнения $\xi=\eta+2\gamma\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)$, при этом

$$\alpha'(\eta)=\frac{1+\gamma'(x)}{1-\gamma'(x)},$$

$$\gamma'(x)\ne 1,\quad 0\le x\le 1.$$

Пусть, в случае задачи (4), (5), выполняется условие

$$\Delta_1(\eta)=\exp\int_{\alpha(\alpha(\eta))}^{\eta}p_1(\xi_1,\eta)d\xi_1-\alpha'(\eta)\alpha'(\alpha(\eta))\exp\int_{\alpha(\alpha(\eta))}^{\eta}p_2(\eta,\xi_1)d\xi_1\ne 0; \tag{7}$$

$$p_1(\xi_1,\eta)=\begin{cases}-b(\xi_1,\alpha(\eta)), & \alpha(\alpha(\eta))\le\xi_1\le\alpha(\eta),\\ -b(\xi_1,\eta), & \alpha(\eta)\le\xi_1\le\eta,\end{cases}$$

$$p_2(\eta,\xi_1)=\begin{cases}a(\alpha(\alpha(\eta)),\xi_1), & \alpha(\alpha(\eta))\le\xi_1\le\alpha(\eta),\\ a(\alpha(\eta),\xi_1), & \alpha(\eta)\le\xi_1\le\eta,\end{cases}$$

а в случае задачи (4), (6) имеет место

$$\Delta_2(\eta)=\exp\int_{\alpha(\alpha(\eta))}^{\eta}p_1(\xi_1,\eta)d\xi_1-\exp\int_{\alpha(\alpha(\eta))}^{\eta}p_2(\eta,\xi_1)d\xi_1\ne 0. \tag{8}$$

Тогда справедлива

Теорема. Задача 1 однозначно разрешима.

п. 2. Доказательство теоремы. Сначала рассмотрим задачу (4), (5). Используя общее решение уравнения (4) [1] в [3] показано, что решение задачи Коши для уравнения (4) представимо в виде

$$u(\xi,\eta)=\frac{\tau(\eta)}{2}R(\eta,\eta;\xi,\eta)+\frac{\tau(\xi)}{2}R(\xi,\xi;\xi,\eta)+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\eta}^{\xi}\left\{\nu(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta)-\tau(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\Big|_{\xi_1=\eta_1}+\right. \tag{9}$$
$$\left.+2\left[a(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial\xi_1}{\partial N}+b(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial\eta_1}{\partial N}\right]\Big|_{\xi_1=\eta_1}R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta)\tau(\xi_1)\right\}d\xi_1,$$

где $R(\xi_1,\eta_1,\xi,\eta)$ – функция Римана уравнения (6), а

$$\frac{\partial}{\partial N}\Big|_{\xi_1=\eta_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}-\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)\Big|_{\xi_1=\eta_1}.$$

Из (9), при $\xi=\alpha(\eta)$, используя краевое условие (5), получим интегральные уравнения первого рода

$$f_1(\eta)=\int_{\alpha(\eta)}^{\eta}\nu(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\alpha(\eta),\eta)d\xi_1,\quad 0\le\eta\le 1,$$

где

$$\sqrt{2}f_2(\eta)=-g(\eta)+\frac{\tau(\eta)}{2}R(\eta,\eta;\alpha(\eta),\eta)+\frac{\tau(\alpha(\eta))}{2}R(\alpha(\eta),\alpha(\eta);\alpha(\eta),\eta)-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\eta}^{\alpha(\eta)}\left\{\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\alpha(\eta),\eta)\Big|_{\xi_1=\eta_1}-2\left[a(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial\xi_1}{\partial N}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+b(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial\eta_1}{\partial N}\right]\Big|_{\xi_1=\eta_1}R(\xi_1,\xi_1;\alpha(\eta),\eta)\right\}\tau(\xi_1)d\xi_1,$$

которая дифференцированием сводятся к следующему функционально-интегральному уравнению

$$a_1(\eta)\nu(\eta)+b_1(\eta)\nu(\alpha(\eta))=\mu(\eta),\ \ 0\le\eta\le 1 \tag{10}$$

$$a_1(\eta)=R(\eta,\eta;\alpha(\eta),\eta);$$

$$b_1(\eta)=-\alpha'(\eta)R(\alpha(\eta),\alpha(\eta);\alpha(\eta),\eta);$$

$$\mu(\eta)=-\int_{\alpha(\eta)}^{\eta}\nu(\xi_1)\frac{\partial}{\partial\eta}R(\xi_1,\xi_1;\alpha(\eta),\eta)d\xi_1+f_1'(\eta).$$

В [4] показано, что, если

$$\Delta_1(\eta)=a_1(\eta)a_1[\alpha(\eta)]-b_1(\eta)b_1[\alpha(\eta)]\neq 0, \quad (11)$$

то функциональное уравнение (11) имеет единственное решение вида

$$\nu(\eta)=\frac{a_1(\alpha(\eta))\mu_2(\eta)-b_1(\eta)\mu_2(\alpha(\eta))}{\Delta_1}. \quad (12)$$

Из определения функции Римана R [1, 5], формула (11) записывается в виде (7), а (12) – в следующем виде

$$G(\eta,\xi_1)=\begin{cases}-\frac{1}{\Delta_1}\frac{\partial}{\partial\eta}R(\xi_1,\xi_1;\alpha(\alpha(\eta)),\alpha(\eta))\exp\int_{\alpha(\eta)}^{\eta}a(\alpha(\eta),\eta_1)d\eta_1, & \alpha(\alpha(\eta))\le\xi_1\le\alpha(\eta),\\ -\frac{1}{\Delta_1}\frac{\partial}{\partial\eta}R(\xi_1,\xi_1;\alpha(\eta),\eta)\exp\int_{\alpha(\eta)}^{\alpha(\alpha(\eta))}b(\eta_1,\alpha(\eta))d\eta_1, & \alpha(\eta)\le\xi_1\le\eta,\end{cases} \quad (13)$$

$$g(\eta)=\frac{\left[f_1'(\eta)\exp\int_{\alpha(\eta)}^{\alpha(\alpha(\eta))}b(\eta_1,\alpha(\eta))d\eta_1+f_1'(\alpha(\eta))\exp\int_{\alpha(\eta)}^{\eta}a(\alpha(\eta),\eta_1)d\eta_1\right]}{\Delta_1}.$$

Известно, что функция Римана R по переменным ξ_1, η_1 и ξ, η имеет такую же гладкость, что и коэффициенты уравнения (4) [5], поэтому ядро $G(\xi, \xi_1)$ допускает оценку

$$|G(\eta,\xi_1)|\le M_1. \quad (14)$$

Решение интегрального уравнения (13) будем искать в виде ряда

$$\nu(\eta)=\sum_{k=0}^{\infty}\nu_k(\eta); \quad (15)$$

$$\nu_0(\eta)=g(\eta);$$

$$\nu_k(\eta)=\int_{\alpha(\alpha(\eta))}^{\eta}G(\eta,\xi_1)\nu_{k-1}(\xi_1)d\xi_1;\ k=1,2,\dots .$$

Из (14) получим следующие оценки

$$|\nu_0(\eta)|=\max_{[0,1]}|g(\eta)|=m_1;\quad |\nu_1(\eta)|\le m_1M_1\eta;$$

$$|\nu_2(\eta)|=m_1M_1^2\frac{\eta^2}{2},$$

и вообще $|\nu_k(\eta)|\le m_1\frac{(M_1\eta)^k}{k!}\le m_1\frac{M_1^k}{k!}$.

Тогда, для ряда (15) будем иметь

$$|\nu(\eta)|\le\sum_{k=0}^{\infty}|\nu_k(\eta)|\le m_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{M_1^k}{k!}\le m_1\exp M_1.$$

Таким образом, интегральное уравнение (13), (а также (10)), при выполнении условия (7), однозначно разрешимо.

Следовательно, задача (4), (5) имеет единственное решение вида (9), в котором $\nu(\eta)$ находятся из уравнения (13)

Теорема для задачи (1), (2) доказано.

Теперь рассмотрим задачу (1), (3), которая переходит к задаче (4), (6). В этом случае, из (9) при $\xi=\alpha(\eta)$, с учетом (6), получим следующее функционально-интегральное уравнение

$$a_2(\eta)\tau(\eta)+b_2(\eta)\tau(\alpha(\eta))=\chi(\eta),\ 0\le\eta\le 1, \quad (16)$$

где

$$a_2(\eta)=R(\eta,\eta;\alpha(\eta),\eta)=\exp\int_{\eta}^{\alpha(\eta)}b(\xi_1,\eta)d\xi_1;$$

$$b_2(\eta)=R(\alpha(\eta),\alpha(\eta);\alpha(\eta),\eta)=\exp\int_{\alpha(\eta)}^{\eta}a(\alpha(\eta),\eta_1)d\eta_1;$$

$$\chi(\eta)=f_2(\eta)+\int_{\eta}^{\alpha(\eta)}\tau(\xi_1)H(\eta,\xi_1)d\xi_1;$$

$$f_2(\eta)=2g(\eta)-\sqrt{2}\int_{\eta}^{\alpha(\eta)}\nu(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\alpha(\eta),\eta)d\xi_1;$$

$$H(\eta,\xi_1)=\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}-\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)R(\xi_1,\eta_1;\alpha(\eta),\eta)\Big|_{\xi_1=\eta_1}-2\big(a(\xi_1,\eta_1)-b(\xi_1,\eta_1)\big)R(\xi_1,\xi_1;\alpha(\eta),\eta).$$

Если выполняется условие

$$\Delta_2(\eta)=a_2(\eta)\,a_2[\alpha(\eta)]-b_2(\eta)b_2[\alpha(\eta)]\neq 0,$$

или это тоже, самое условие (8), то функциональное уравнение (16) имеет единственное решение вида

$$\tau(\xi\ )=\psi(\eta)+\int\limits_{\alpha(\alpha(\eta))}^{\eta}G(\eta,\xi_1)\tau(\xi_1)d\xi_1,\quad 0\le\eta\le 1, \qquad (17)$$

$$\psi(\eta)=\left[f(\eta)\exp\int\limits_{\alpha(\eta)}^{\alpha(\alpha(\eta))}b(\eta_1,\alpha(\eta))d\eta_1-f(\alpha(\eta))\exp\int\limits_{\alpha(\eta)}^{\eta}a(\alpha(\eta),\eta_1)d\eta_1\right]/\Delta_2;$$

$$G(\eta,\xi_1)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta_2}H(\alpha(\eta),\xi_1)\exp\displaystyle\int\limits_{\alpha(\eta)}^{\eta}a(\alpha(\eta),\eta_1)d\eta_1, & \alpha(\alpha(\eta))\le\xi_1\le\alpha(\eta),\\ -\dfrac{1}{\Delta_2}H(\eta,\xi_1)\exp\displaystyle\int\limits_{\alpha(\eta)}^{\alpha(\alpha(\eta))}b(\eta_1,\alpha(\eta))d\eta_1, & \alpha(\eta)\le\xi_1\le\eta,\end{cases}$$

при этом $\max\limits_{[0,1]}|\psi(\eta)|=m_2;\ |G(\eta,\xi_1)|\le M_2.$

Решение интегрального уравнения (17) будем искать в виде ряда

$$\tau(\eta)=\sum_{k=0}^{\infty}\tau_k(\eta),$$

для которого имеет место неравенство

$$|\tau(\eta)|\le m_2\exp M_2.$$

Таким образом, интегральное уравнение (17) (а также (16)), при выполнении условия (8), однозначно разрешимо.

Следовательно, задача (4), (6) имеет единственное решение вида (9), в которой $\tau(\xi)$ определяются из уравнений (17).

Отметим, что, если $A(x, y) = B(x, y) \equiv 0$, то условие (8) не выполняется. В этом случае уравнение (16) имеет вид

$$\tau(\eta)+\tau(\alpha(\eta))=f(\eta)+\int\limits_{\eta}^{\alpha(\eta)}\tau(\xi_1)H(\eta,\xi_1)d\xi_1; \qquad (18)$$

$$H(\eta,\xi_1)=\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}-\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)R(\xi_1,\eta_1;\alpha(\eta),\eta)\Big|_{\xi_1=\eta_1}.$$

Так как интегральный оператор, стоящий в правой части равенства (18), вполне непрерывен, то, как показано в [4], функциональное уравнение (18) имеет единственное решение.

Таким образом, и в этом случае задача (4), (6) однозначно разрешима.

Теорема для задачи (1), (3) доказана.

Список литературы

1. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. – М.: Изд. АН СССР, 1959. – 164 с.

2. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

3. Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. – Алматы: Ғылым, 1994. – 170 с.

4. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука 1977. – 448 с.

5. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – 301 с.

К СОЗДАНИЮ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СВЕРХЗВУКОВЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Башуров В.В., Гилев В.М., Запрягаев В.И., Киселев Н.П.

ФГБУН «Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН», Новосибирск, e-mail: gil@itam.nsc.ru

В работе приведено обоснование необходимости создания автоматизированной системы сбора и первичной обработки данных на экспериментальном стенде, предназначенном для исследования сверхзвуковых струйных течений. С помощью системы будет производиться сбор данных эксперимента непосредственно в ЭВМ, их накопление и обработка.