УДК 532.517.4

## МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ЖИДКОЙ ФАЗЕ БАРБОТАЖНОГО СЛОЯ

Лаптев А.Г., Лаптева Е.А.

ФГБОУ ВПО «Казанский государственный энергетический университет» Казань, e-mail: tvt kgeu@mail.ru

Рассмотрено применение модели локальной изотропной турбулентности для определения коэффициентов турбулентной вязкости в газожидкостном слое при пузырьковом и пенном режимах. Получены выражения для расчета коэффициентов турбулентной вязкости, связанные с динамической скоростью трения и средней скоростью диссипации энергии. Представлены результаты расчета данных коэффициентов при различных скоростях газа в барботажном слое.

Ключевые слова: изотропная турбулентность, газожидкостный слой, турбулентная вязкость, динамическая скорость, диссипация энергии

# MODEL OF TURBULENCE IN LIQUID PHASE BUBBLE-LAYER Laptev A.G., Lapteva E.A.

Kazan State Power Engineering University, Kazan, e-mail: tvt kgeu@mail.ru

The application of local isotropic turbulence model to determine the turbulent viscosity in the gas-liquid layer at the bubble and foam modes. The expressions for calculating the turbulent viscosity associated with the dynamic friction velocity and the average energy dissipation rate. The results of the calculation of these coefficients at different gas velocities in the bubbling bed.

Keywords: isotropic turbulence, the gas-liquid layer, turbulent viscosity, friction velocity, energy dissipation

В промышленных аппаратах химической технологии и энергетических установках движение газов (паров) и жидкостей практически всегда происходит при турбулентном режиме. Поэтому для поиска путей совершенствования технологического и энергетического оборудования важное значение имеет достоверный расчет турбулентных течений.

Первые фундаментальные исследования турбулентных течений были выполнены еще в 19 веке Г. Гагеном, О. Рейнольдсом, Ж. Буссинеском, Г. Лоренцем и в начале 20 века развиты многими учеными (Л. Прандтль, Т. Кармен, В. Экман, И. Бюргерс, А. Колмогоров, Х. Драйден, Г. Кла-узер, Дж. Тейлор, Г. Шлихтинг, Л. Лойцянский и др). Разработаны различные полуэмпирические теории пристенной турбулентности и отрывных течений. Осреднение по Рейнольдсу уравнений динамики вязкой жидкости приводит к системе уравнений Рейнольдса, называемые уравнениями для первых моментов. В общем случае проблема замыкания этих уравнений сводится к установлению связи тензора турбулентных напряжений с тензором осредненных скоростей деформаций.

Одна из первых попыток упростить расчет турбулентных течений принадлежит Буссинеску, который ввел понятие турбулентной вязкости. Далее эта гипотеза была развита Прандтлем и Карманом. При этом делались различные допущения о характере изменения коэффициента  $\mathbf{v}_{\mathbf{T}}(\mathbf{y})$ . Опытами было установлено, что  $\mathbf{n}_{\mathbf{r}}$  изменяется по

поперечному сечению потока, возрастая по мере удаления от стенки до некоторого максимума и затем убывая на оси потока. Часто с достаточной для практических расчетов принимают среднее значение  $V_T \approx const$  в ядре потока, т.е. за пределами пристенного слоя.

Целью данной работы является получить приближенные расчетные выражения для коэффициента средней турбулентной вязкости в барботажном слое.

### Коэффициент турбулентной вязкости

Рассмотрим теоретический подход определения коэффициента турбулентной вязкости в ядре потока, связанный со скоростью диссипации энергии турбулентности.

Коэффициент турбулентной вязкости по определению записывается в виде:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{T}} = \mathbf{v}' l, \tag{1}$$

где  $\upsilon'$  — пульсационная скорость, м/с; l — масштаб турбулентного движения, м.

В вязком подслое  $(y < \delta_1)$  [1]

$$\sqrt{\overline{u'v'}} = u_* - v \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{2}$$

где u',  $\upsilon'$  – продольная и поперечная составляющая пульсационной скорости, м/с;  $u_*$  – динамическая скорость трения, м/с; u – продольная скорость в пограничном слое, м/с; y –поперечная координата, м;  $\delta_1$  – толщина вязкого подслоя, м;  $\upsilon$  – коэффициент кинематической вязкости, м²/с.

а в основной зоне генерации турбулентности  $\left(\delta_1 < y < \delta\right)$ 

$$\sqrt{\overline{u'v'}} \approx u_*,$$
(3)

где  $\delta$  – толщина гидродинамического пограничного слоя, м.

Во внешней части пограничного слоя (окрестности оси канала)

$$\sqrt{u'v'} \approx u_* (1 - y / \delta).$$
 (4)

Для основной зоны генерации турбулентности коэффициент турбулентной вязкости (1) с учетом (3) получит вид

$$v_{\mathrm{T}} = u_* l. \tag{5}$$

Принимая модель локальной изотропной турбулентности запишем скорость диссипации энергии [2]

$$\varepsilon \approx 1, 1 \frac{\left(v'\right)^3}{I} = 1, 1 \frac{u_*^3}{I}.$$
 (6)

Из выражений (5) и (6) получим среднее значение  $\mathbf{n}_{_{\mathrm{T}}}$  при  $\mathcal{Y}$   $\geq$   $\delta$ 

$$v_{\mathrm{T}} = 1, 1 \frac{u_{*}^{4}}{\varepsilon}.\tag{7}$$

Как отмечено, выражение (6) имеет более широкую область применения [3-9], а не только для условий локальной однородности и изотропности потока.

#### Турбулентность в жидкой фазе

При исследовании гидродинамики барботажного слоя обычно определяют коэффициенты продольного и поперечного перемешивания, которые связаны с режимом работы аппарата и его конструкцией. Как правило, коэффициенты перемешивания всегда больше коэффициента турбулентной вязкости. Только при малых скоростях газа основную роль в продольном перемешивании играют турбулентные пульсации, обусловленные деформациями газовых пузырей и заполнением жидкостью покинутого им объема, то есть турбулентностью в следах за газовыми пузырями.

Рассмотрим два режима барботажа в газожидкостных аппаратах [8]:

Пузырьковый режим с малым газосодержанием ( $\phi_{\Gamma} < 0.1$ ), когда расстояние между пузырьками больше их диаметра и стесненностью можно пренебречь.

При скорости газа на полное сечение барботажного аппарата (без учета жидкости)  $W_{\Gamma}$ <0,1 м/с выражение для расчета динамической скорости получено в виде [8].

$$u_{*_{\mathcal{K}}} = 2,2 \left( v_{\mathcal{K}} g w_{\Gamma} \right)^{0,25},$$
 (8)

а при  $w_r > 0.1 \text{ M/c}$ 

$$u_{*_{\mathcal{K}}} = 2,2 \left[ v_{\mathcal{K}} g w_{\Gamma} \left( 1 - \varphi_{\Gamma} \right)^{2} \right]^{0,25}$$
. (9)

где ф – среднее объемное газосодержание.

Газосодержание вычисляется по известным эмпирическим выражениям [8], например по формуле

$$\phi_{\Gamma} = 0, 4 \left(\frac{\rho_{\Gamma}}{\rho_{\kappa}}\right)^{0.15} \left(w_{\Gamma} \sqrt[4]{\frac{\Delta \rho}{\sigma g}}\right)^{0.68}, (10)$$

где  $\rho_{\rm r}$ ,  $\rho_{\rm w}$  — плотности газа и жидкости, кг/м³;  $\sigma$  —поверхностное натяжение, Н/м;  $\Delta \rho$  — разность плотностей жидкости и пузырька, кг/м³.

При выводе выражений (8), (9) было принято, что газ барботирует в условно неподвижную жидкость.

В выражении (7) составляющую от средней скорости диссипации энергии в окрестности пузырька (в пограничном слое и вихревом следе) запишем в виде

$$\varepsilon_{\mathcal{K}} = \frac{\tau_{\rm rp} F \left( u_{\infty} - u_{\rm rp} \right)}{\rho_{\mathcal{K}} V_{\mathcal{K}}},\tag{11}$$

 ${\rm t_{rp}}$ — среднее касательное напряжение на поверхности пузырей, Па;  $u_{\infty}$ — скорость движения пузырей, м/с;  $u_{\rm rp}$ — скорость движения межфазной поверхности, м/с;  $V_{\rm w}$ — объем жидкости, где происходит диссипация энергии, м³; F— площадь поверхности пузырька, м².

Учитывая, что толщина гидродинамического слоя на пузырьке на порядок меньше его диаметра запишем объем в виде суммы

$$V_{\mathcal{K}} = V_{\delta} + V_{c_{\Pi}}, \tag{12}$$

где  $V_{\text{сл}}$  – объем вихревого следа за пузырьком, м³;  $V_{\delta} = F\delta$  – объем пограничного слоя на пузырьке, м³;  $\delta$  – средняя толщина пограничного слоя, м.

Представляя объем вихревого следа в виде полуэллипсоида вращения, в центр которого вписана дисперсная частица (пузырек), запишем [10]

$$V_{\rm c...} = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{S}{R},\tag{13}$$

где R — радиус пузырька, м; S — длина вихревого следа, м.

При числах Re >100 длина вихревого следа примерно равна [11]

$$\frac{S}{2R} \approx 1, 2. \tag{14}$$

Тогда

$$V_{\rm C,II} = 3.2 \,\pi R^{3}. \tag{15}$$

Тогда из (11) - (15) при  $F = 4\pi R^2$  получим

$$\varepsilon_{\mathcal{K}} = \frac{4\tau_{\Gamma p} \left( u_{\infty} - u_{\Gamma p} \right)}{\rho_{\mathcal{K}} \left( 4\delta + 3, 2R \right)} = \frac{4u_{*_{\mathcal{K}}}^2 \left( u_{\infty} - u_{\Gamma p} \right)}{4\delta + 3, 2R} \tag{16}$$

и выражение (7) запишется в виде

$$v_{\rm T \, m} = 1.1 \left( 4\delta + 3.2R \right) \frac{u_{*\rm m}^2}{4 \left( u_{\infty} - u_{\rm rp} \right)}.$$
 (17)

Учитывая, что  $d_{\Pi} >> \delta$  среднюю толщину пограничного слоя найдем из выражения для пластины с учетом движения межфазной поверхности [12]

$$\delta \approx 3.3 \sqrt{\frac{v_{\text{xt}}L}{u_{\infty} - u_{\text{rp}}}} = 3.3 \sqrt{\frac{\pi R v_{\text{xt}}}{\left(u_{\infty} - u_{\text{rp}}\right)}}$$
,(18)

где  $L = \pi R$  полупериметр длины обтекания пузырька, м.

Известно также выражение  $\delta / R \approx \sqrt{2 / \mathrm{Re}_{\Pi}} [13]; \mathrm{Re}_{\Pi} = u_{\infty} 2 \ R / \nu_{\mathrm{ж}} -$ число Рейнольдса для пузырька.

Среднюю скорость на границе раздела можно вычислить, используя функцию Адамара — Рыбчинского

$$u_{\rm rp} = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi/2} \frac{u_{\infty} \sin \varphi}{2(1 + \mu^*)} d\varphi = \frac{u_{\infty}}{\pi (1 + \mu^*)}, (19)$$

где  $\mu^* = \mu_\Gamma + \mu_{\mathcal{K}}$  — отношение коэффициентов динамической вязкости дисперсной и сплошной фаз;  $\phi$  —угол.

В выражениях (17), (18) диаметр  $d_{\pi}$  =2R и скорость всплытия пузыря вычисляются по известным зависимостям

$$d_{\Pi} = 1,5 \sqrt[3]{\frac{d_{o}\sigma}{\Delta \rho g}}, \qquad (20)$$

$$u_{\infty} = 1.5 \left( \sigma g \Delta \rho / \rho_{\mathcal{K}}^2 \right)^{0.25}. \tag{21}$$

где  $d_{\rho}$  – диаметр отверстия барботера, м. Из (7), (8) и (17) в итоге получим

$$v_{_{\rm T} \text{ }_{\rm K}} = 1,33 \left(4\delta + 1,6d_{_{\rm II}}\right) \frac{\left(v_{_{\rm K}}gw_{_{\rm \Gamma}}\right)^{0,5}}{\left(u_{_{\infty}} - u_{_{\rm \Gamma p}}\right)}.(22)$$

Режим стесненного движения пузырей.

Переход к такому режиму можно оценить по условию  $\phi_{\mathcal{K}} \approx (1-\phi_{\Gamma})$ , где  $\phi_{\sigma}$  - удельный объем жидкости, находящийся в пограничных слоях всех пузырей и их вихревых следах. Из геометрических выводов имеем  $\phi_{\mathcal{K}} \approx 6\phi\,0.25\,\left(4\delta + 3.2R\right)/d_{\Pi}$ , Как показывают расчеты, для системы воздух — вода, такой режим начинается при  $w_{\sigma} > 0.2\,$  м/с.

 $W_{\Gamma} > 0,2$  м/с. Eсли  $\phi_{\mathcal{K}} \geq (1-\phi_{\Gamma})$ , то имеем  $\phi_{\mathcal{K}} \approx (1-\phi)$ , и при таком режиме энергия диссипирует во всем объеме жидкой фазы и в газовых пузырях. Тогда выражение (11) запишем, используя удельную поверхность газожидкостного слоя

$$a_{\rm V} = \frac{F}{\rm V_{\rm DW}} = \frac{6\varphi_{\rm \Gamma}}{d_{\rm II}},\tag{23}$$

$$\varepsilon_{\mathcal{K}} = \frac{\tau_{\Gamma p} 6 \varphi_{\Gamma} \left( u_{\infty} - u_{\Gamma p} \right) V_{\Gamma, \mathcal{K}}}{\rho_{\mathcal{K}} V_{\mathcal{K}} d_{\Pi}}, \quad (24)$$

где  $V_{r,x}$  — объем газожидкостного слоя,  $M^3$ ;  $V_x$  — объем жидкости в слое,  $M^3$ .

\* Если скорость газа в слое превышает скорость свободного всплытия пузыря, то  $\left(u_{\infty} - u_{\rm rp}\right) = w_{\rm r}$ .

Учитывая связь

$$V_{\Gamma,\mathcal{K}} = \frac{V_{\mathcal{K}}}{1 - \varphi_{\Gamma}}, \qquad (25)$$

уравнение (24) получит форму

$$\varepsilon_{\mathcal{K}} = 6 \frac{u_*^2 \mathbf{w}_{\Gamma} \mathbf{\phi}_{\Gamma}}{d_{\Pi} (1 - \mathbf{\phi}_{\Gamma})}.$$
 (26)

Из (7) и (26) получим

$$v_{T * K} = 0.183 \frac{u_*^2 d_{\Pi} (1 - \varphi)}{w_{\Gamma} \varphi}.$$
 (27)

где диаметр пузырьков

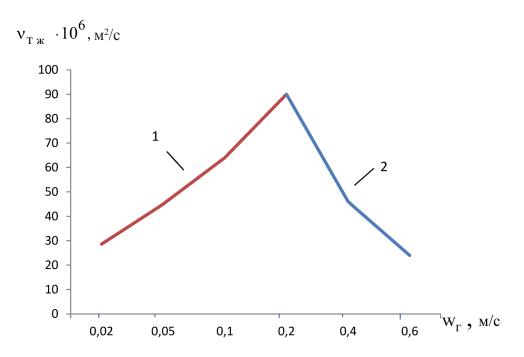
$$d_{\Pi} = \sqrt{\frac{6V_{o}}{\pi u_{\infty}}} = \sqrt{\frac{6w_{\Gamma}S_{K}}{\pi n u_{\infty}}}, \qquad (28)$$

где  $V_o$  — расход газа через отверстие, м³/с;  $S_{_{\rm K}}$  — площадь поперечного сечения аппарата, м²; n — число отверстий в барботере.

Окончательно с  $u_*(9)$  имеем

$$v_{\text{T} \text{ m}} = 0.887 \frac{d_{\text{II}} (1 - \varphi)^2}{\varphi} \left( \frac{v_{\text{m}} g}{w_{\text{F}}} \right)^{0.5} \cdot (29)$$

На рисунке дана зависимость  $\nu_{_{\text{тж}}}$  от скорости газа в барботажном слое.



Зависимость коэффициента  $n_{\max}$  от скорости газа: 1- расчет по (22); 2- расчет по (29). Система воздух - вода

#### Выводы

В статье на основе использования модели локальной изотропной турбулентности получены выражения для приближенного расчета средних значений коэффициента турбулентной вязкости в ядре жидкой фазы барботажного слоя. В результате расчетов получено, что при небольших скоростях газа ( $\mathbf{w}_{\Gamma} < 0,2$ ), и как следствие малых значениях газосодержания ( $\mathbf{\phi}_{\Gamma} < 0,15$ ), коэффициент турбулентной вязкости увеличивается с повыщением скорости газа, примерно  $\mathbf{v}_{T} \sim \mathbf{w}_{\Gamma}$ . Этот режим характеризуется нестесненным движением пузырей и турбулентность вызвана, главным образом вихревым следом. При  $\mathbf{w}_{\Gamma} > 0,2$  м/с начина-

ется стесненное движение пузырей и с повышением скорости газа коэффициент турбулентной вязкости значительно снижается. Это можно объяснить уменьшением масштаба турбулентности l в выражении (5), так как расстояние между пузырями уменьшается. При скоростях газа  $\mathbf{w}_{\Gamma} > 0,4 \div 0,6$  м/с в отверстиях барботера образуются газовые струи (факелы), которые являются источниками генерации турбулентности. Для такого режима расчет ведется с учетом газовых струй [9].

Полученные выражения (22) и (29) пригодны для  $w_{\Gamma} < 0.4 \div 0.6$  м/с и могут использоваться для расчетов высокослойных барботажных реакторов, аэротенков, флотаторов и других аппаратов с газожидкостны-

ми средами, когда концевыми (входными) эффектами можно пренебречь.

#### Список литературы

- 1. Кутателадзе С.С. Консервативные свойства пристенной турбулентности / С.С. Кутателадзе // ТОХТ. 1971. Т. 5, № 1. С. 3–12.
- 2. Таунсенд А.А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: Наука, 1959.-400 с.
- 3. Барабаш В.М. Процессы переноса в турбулентных потоках с интенсивным внешним источником турбулизации / В.М. Барабаш // Теор. основы хим. технол. 1994. Т. 28, № 2. С. 110–117.
- 4. Kawase Y. Mathematical models for design of biorectors applications of Kolmogoroff's theory of isotropic turbulence / Y. Kawase, M. Moo-Young // Chem. Eng. J. -1990.-V.43,  $N_25.-P.1319-1341$ .
- 5. Лаптев А.Г. Математическое моделирование теплоотдачи при турбулентном обтекании пучков труб / А.Г. Лаптев, С.Г. Дьяконов, В.И. Елизаров // Теплоэнергетика. 1992.- N 12.- C. 34–38.
- 6. Брагинский Л.Н. Перемешивание в жидких средах: физические основы и инженерные методы расчета /

- Л.Н. Брагинский, В.И. Бегачев, В.М. Барабаш. Л.: Химия, 1984
- 7. Доманский И.В. Обобщение различных случаев конвективного теплообмена с помощью полуэмпирической теории турбулентного переноса / И.В. Доманский, В.Н. Соколов // Теор. основы хим. технол. 1968. Т. 2, № 5. С. 761—767.
- 8. Соколов В.Н. Газожидкостные реакторы / В.Н.Соколов, И.В.Доманский. Л.: Машиностроение, 1976.
- 9. Лаптева Е.А., Фарахов Т.М. Модель турбулентной вязкости в барботажных аппаратах // Вестник КГЭУ, 2012, № 4. С. 26-33
- **10.** Лаптев А.Г. Модели пограничного слоя и расчет тепломассообменных процессов. Казань: Изд-во Казан. унта, 2007. 500 с.
- 11. Нигматуллин Р.И. Динамика многофазных сред / Р.И. Нигматуллин. М.: Наука, 1987.
- 12. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. / Г. Шлихтинг. М.: Наука, 1974.
- 13. Броунштейн Б.И. Гидродинамика, массо- и теплообмен в колонных аппаратах / Б.И. Броунштейн, В.В. Щеголев. Л.: Химия, 1988.