УДК 517.956

КОРРЕКТНОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Алдашев С.А., Бекбатшаев М.Ж.

Казахский Национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, email: aldash51mail.ru

В работе для линейных гиперболических уравнений второго порядка на плоскости показано корректность задачи с отходом от характеристики, которые встречаются в трансзвуковых проблем.

Ключевые слова: задача, гиперболическое уравнение,характеристика,коррекность

WELL-POSEDNESS OF A BOUNDARY – VALUE WITH DEPARTURE FROM THE CHARACTERISTIC FOR LINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS OF SECOND ORDER ON A PLANE

Aldashev S.A., Bekpatchaev M.J.

Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, email: aldash51mail.ru

This paper shows the well – posedness of the problems with departure from characteristic for second – order linear hyperbolic equations on a plane. Such problems are encountered while studying transsovnd problems.

Keywords: mutually – problem, hyperbolic equation, characteristic, well – posedness

1. Постановка задачи и результат. Пусть $D \subset R^2 -$ конечная область, ограниченная отрезком $AB: 0 \le x \le 1$ оси $y = 0$, а при $y > 0$ – отрезком

$$AF: y = x, 0 \le x \le h, 0 < h = \text{const} < 1/2,$$

гладкой кривой $FH: y = \gamma(x),\ h \le x \le l$ вдоль которой

$$0 < \gamma'(x) < 1, \gamma(h) = h, \gamma(l) = 1 - l$$

и прямой $HB: y = 1 - x$.

В области D рассмотрим линейные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv u_{xx} - u_{yy} + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = 0, \tag{1}$$

$$A, B \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D), C \in C(D).$$

В качестве краевой задачи с отходом от характеристики рассмотрим следующую

Задача 1 Найти в области D решение уравнения (1) из класса $C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ удовлетворяющие краевым условиям

$$u\big|_{AB} = \tau(x), u\big|_{AF} = \sigma_0(x), u\big|_{FH} = \varphi(x), \tag{2}$$

или

$$u_y\big|_{AB} = \nu(x), u\big|_{AF} = \sigma_0(x), u\big|_{FH} = \varphi(x), \tag{3}$$

$$\tau(x), \nu(x) \in C^1(0 \le x \le 1) \cap C^2(0 < x < 1), \sigma_0(x) \in C^1(0 \le x \le h) \cap C^2(0 < x < h),$$
$$\phi(x) \in C^1(h \le x \le l) \cap C^2(h < x < l),$$

которая встречается при исследовании трансзвуковых проблем [1].

В характеристических координатах $\xi = x + y$, $\eta = x - y$, уравнение (1) записывается следующим образом.

$$u_{\xi\eta} + au_\xi + bu_\eta + cu = 0, \tag{4}$$

$$4a(\xi,\eta) = A + B, 4b(\xi,\eta) = A - B, 4c(\xi,\eta) = C.$$

При этом краевые условия (2) и (3) соответственно имеют вид

$$u(\xi,\xi) = \tau(\xi),\ 0 \le \xi \le 1,\ u(\xi,0) = \psi_1(\xi),$$
$$0 \le \xi \le \xi_0, \tag{5}$$
$$u(\xi,\alpha(\xi)) = \psi_2(\xi),\ \xi_0 \le \xi \le 1,$$

или

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\Big|_{\xi=\eta}=\nu(\xi),\ 0\le\xi\le1,\ u(\xi,0)=\psi_1(\xi), 0\le\xi\le\xi_0,$$

$$u(\xi,\alpha(\xi))=\psi_2(\xi),\ \xi_0\le\xi\le1, \tag{6}$$

где

$$\psi_1(\xi)=\sigma_0\left(\frac{\xi}{2}\right),\ \psi_2(\xi)=\phi\left(\frac{\xi}{2}+\frac{\alpha(\xi)}{2}\right),$$

а функция $\eta=\alpha(\xi)$ является решением уравнения $\eta=\xi-2\gamma\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)$, при этом

$$\alpha'(\xi)=\frac{1-\gamma'(x)}{1+\gamma'(x)},\ \xi_0<\xi<1,\ \xi_0=2h.$$

Пусть в случае задачи (4), (5) выполняется условие

$$\Delta_1(\xi)=\exp\int\limits_{\alpha(\alpha(\xi))}^{\xi}p_1(\xi,\xi_1)d\xi_1-\alpha'(\xi)\alpha'(\alpha(\xi))\exp\int\limits_{\alpha(\alpha(\xi))}^{\xi}p_2(\xi_1,\xi)d\xi_1\ne0,\ \xi_0\le\xi\le1, \tag{7}$$

$$p_1(\xi,\xi_1)=\begin{cases}-a(\alpha(\xi),\xi_1),\alpha(\alpha(\xi))\le\xi_1\le\alpha(\xi),\\ -a(\xi,\xi_1),\alpha(\xi)\le\xi_1\le\xi,\end{cases}$$

$$p_2(\xi_1,\xi)=\begin{cases}b(\xi_1,\alpha(\alpha(\xi))),\alpha(\alpha(\xi))\le\xi_1\le\alpha(\xi),\\ b(\xi_1,\alpha(\xi)),\alpha(\xi)\le\xi_1\le\xi,\end{cases}$$

а в случае задачи (4), (6) имеет место

$$\Delta_2(\xi)=\exp\int\limits_{\alpha(\alpha(\xi))}^{\xi}p_1(\xi,\xi_1)d\xi_1-\exp\int\limits_{\alpha(\alpha(\xi))}^{\xi}p_2(\xi_1,\xi)d\xi_1\ne0,\ \xi_0\le\xi\le1. \tag{8}$$

Тогда справедлива теорема**.** Задача 1 однозначно разрешима.

2. Доказательство теоремы**.** Сначала рассмотрим задачи (1), (2), которое переходит к задаче (4), (5). Используя общее решение уравнения (4) [2] в [3] показано, что решение задачи Коши для уравнения (4) представимо в виде

$$u(\xi,\eta)=\frac{\tau(\eta)}{2}R(\eta,\eta;\xi,\eta)+\frac{\tau(\xi)}{2}R(\xi,\xi;\xi,\eta)+\frac{1}{\sqrt2}\int\limits_{\eta}^{\xi}\{\nu(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta)-$$

$$-\tau(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\Big|_{\xi_1=\eta_1}+2\left[a(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial\xi_1}{\partial N}+b(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial\eta_1}{\partial N}\right]\Big|_{\xi_1=\eta_1}R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta)\tau(\xi_1)\ \}d\xi_1, \tag{9}$$

где $R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)$ – функция Римана уравнения (4), $\frac{\partial}{\partial N}\Big|_{\xi_1=\eta_1}=\frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}-\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)\Big|_{\xi_1=\eta_1}$.

Тогда, из (9), при h=0 и $\eta=\alpha(\xi)$, с учетом (5), получим следующие интегральные уравнения первого рода.

$$f_1(\xi)=\int\limits_0^{\xi}\nu(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,0)d\xi_1,\ 0\le\xi\le\xi_0,$$

$$f_2(\xi)=\int_{\alpha(\xi)}^{\xi}\nu(\xi_1)R\big(\xi_1,\xi_1;\xi,\alpha(\xi)\big)d\xi_1,\ \xi_0\le\xi\le 1,$$

$$\sqrt{2}f_1(\xi)=\psi_1(\xi)-\frac{\tau(0)}{2}R(0,0;\xi,0)-\frac{\tau(\xi)}{2}R(\xi,\xi;\xi,0)+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\xi}\Big\{\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,0)\Big|_{\xi_1=\eta_1}-$$

$$-2\left[a(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial\xi_1}{\partial N}+b(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial\eta_1}{\partial N}\right]\Big|_{\xi_1=\eta_1}R(\xi_1,\xi_1;\xi,0)\ \Big\}\tau(\xi_1)d\xi_1,$$

$$\sqrt{2}f_2(\xi)=\psi_2(\xi)-\frac{\tau\big(\alpha(\xi)\big)}{2}R\big(\alpha(\xi),\alpha(\xi);\xi,\alpha(\xi)\big)-\frac{\tau(\xi)}{2}R\big(\xi,\xi;\xi,\alpha(\xi)\big)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\alpha(\xi)}^{\xi}\Big\{\frac{\partial}{\partial N}R\big(\xi_1,\eta_1;\xi,\alpha(\xi)\big)\Big|_{\xi_1=\eta_1}-2\left[a(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial\xi_1}{\partial N}+b(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial\eta_1}{\partial N}\right]\Big|_{\xi_1=\eta_1}R\big(\xi_1,\xi_1;\xi,\alpha(\xi)\big)\ \Big\}\tau(\xi_1)d\xi_1,$$

которые дифференцированием сводятся соответственно к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\nu(\xi)=g_1(\xi)+\int_0^{\xi}G_1(\xi,\xi_1)\nu(\xi_1)d\xi_1,\ 0\le\xi\le\xi_0, \tag{10}$$

$$g_1(\xi)=f_1(\xi)/R(\xi,\xi;\xi,0),\ G_1(\xi,\xi_1)=-\frac{\partial}{\partial\xi}R(\xi_1,\xi_1;\xi,0)/R(\xi,\xi;\xi,0),$$

$$R(\xi,\xi;\xi,0)=\exp\left[-\int_0^{\xi}a(\xi,\eta_2)d\eta_2\right];$$

и функционально-интегральному уравнению

$$a_1(\xi)\nu(\xi)+b_1(\xi)\nu\big(\alpha(\xi)\big)=g_2(\xi),\ \xi_0\le\xi\le 1, \tag{11}$$

$$a_1(\xi)=R\big(\xi,\xi;\xi,\alpha(\xi)\big),\ b_1(\xi)=-\alpha'(\xi)R\big(\alpha(\xi),\alpha(\xi);\xi,\alpha(\xi)\big),$$

$$g_2(\xi)=f_2'(\xi)-\int_{\alpha(\xi)}^{\xi}\nu(\xi_1)\frac{\partial}{\partial\xi}R\big(\xi_1,\xi_1;\xi,\alpha(\xi)\big)d\xi_1.$$

В [4] показано, что если

$$\Delta_1(\xi)=a_1(\xi)a_1\big[\alpha(\xi)\big]-b_1(\xi)b_1\big[\alpha(\xi)\big]\ne 0,\ \xi_0\le\xi\le 1, \tag{12}$$

то функциональное уравнение (11) имеет единственное решение вида

$$\nu(\xi)=\frac{a_1\big(\alpha(\xi)\big)g_2\big((\xi)\big)-b_1(\xi)g_2\big(\alpha(\xi)\big)}{\Delta_1},\ \xi_0\le\xi\le 1. \tag{13}$$

Из определения функции Римана R [2, 5] формула (12) записывается в виде (7), а (13) в следующем виде

$$\nu(\xi)=\mu_1(\xi)+\int_{\alpha(\alpha(\xi))}^{\xi}G_2(\xi,\xi_1)\nu(\xi_1)d\xi_1, \tag{14}$$

$$\mu_1(\xi)=\left[f_2'(\xi)\exp\left(-\int_{\alpha(\alpha(\xi))}^{\alpha(\xi)}a\big(\alpha(\xi),\xi_1\big)d\xi_1\right)+\alpha'(\xi)f_2'\big(\alpha(\xi)\big)\exp\int_{\alpha(\xi)}^{\xi}b\big(\xi_1,\alpha(\xi)\big)d\xi_1\right]\Big/\Delta_1,$$

$$G_2(\xi,\xi_1)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\Delta_1}\dfrac{\partial}{\partial\xi}R\left(\xi_1,\xi_1;\alpha(\xi),\alpha(\alpha(\xi))\right)\exp\int\limits_{\alpha(\xi)}^{\xi}b\left(\eta_1,\alpha(\xi)\right)d\eta_1, \alpha(\alpha(\xi))\le\xi_1\le\alpha(\xi),\\ -\dfrac{1}{\Delta_1}\dfrac{\partial}{\partial\xi}R\left(\xi_1,\xi_1;\xi,\alpha(\xi)\right)\exp\left(-\int\limits_{\alpha(\alpha(\xi))}^{\alpha(\xi)}a\left(\alpha(\xi),\eta_1\right)d\eta_1\right), \alpha(\xi)\le\xi_1\le\xi.\end{cases}$$

Известно, что функция Римана R по переменным ξ_1, η_1 и ξ, η имеет такую же гладкость, что и коэффициенты уравнения (4) [2, 5], поэтому ядро $G_2(\xi,\xi_1)$ допускает оценку

$$\left|G_2(\xi,\xi_1)\right|\le M_1. \qquad (15)$$

Решение интегрального уравнения (14) будем искать в виде ряда

$$\nu(\xi)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\nu_\kappa(\xi), \qquad (16)$$

$$\nu_0(\xi)=\mu_1(\xi),$$

$$\nu_\kappa(\xi)=\int\limits_{\alpha(\alpha(\xi))}^{\xi}G_2(\xi,\xi_1)\nu_{\kappa-1}(\xi_1)d\xi_1,$$

$$\kappa=1,2,...$$

Из (15) получим следующие оценки

$$\left|\nu_0(\xi)\right|=\max_{[\xi_0,1]}\left|\mu_1(\xi)\right|=m_1,$$

$$\left|\nu_1(\xi)\right|\le m_1M_1\xi$$

$$\left|\nu_2(\xi)\right|\le m_1M_1^2\frac{\xi^2}{2},$$

и вообще $\left|\nu_\kappa(\xi)\right|\le m_1\dfrac{(M_1\xi)^\kappa}{\kappa!}\le m_1\dfrac{M_1^\kappa}{\kappa!}$.

Тогда для ряда (16) будем иметь

$$\left|\nu(\xi)\right|\le\sum_{\kappa=0}^{\infty}\left|\nu_\kappa(\xi)\right|\le m_1\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{M_1^\kappa}{\kappa!}=m_1\exp M_1.$$

Таким образом, интегральное уравнение (14), (а также (11)), при выполнений условия (7) однозначно разрешимо.

Следовательно, задача (4), (5) имеет единственное решение вида (9), в которой $\nu(\xi)$ определяются из (10) и (14).

Теорема для задачи (1), (2) доказана.

Теперь рассмотрим задачу (1), (3) , которая переходит к задаче (4), (6). В этом случае из (9) при h=0 и $\eta=\alpha(\xi)$, с учетом (6), получим следующие интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\tau(\xi)=\chi_1(\xi)+\int\limits_0^{\xi}\chi_1(\xi_1)H_1(\xi,\xi_1)d\xi_1,\ \ 0\le\xi\le\xi_0, \qquad (17)$$

$$\chi_1(\xi)=\left[2\psi_1(\xi)-\psi_1(0)R(0,0;\xi,0)-\sqrt{2}\int\limits_0^{\xi}\nu(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi_1,0)d\xi_1\right]\Big/R(\xi,\xi;\xi,0),$$

$$H_1(\xi,\xi_1)=\left\{\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,0)\Big|_{\xi_1=\eta_1}-2\sqrt{2}\left[a(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial\xi_1}{\partial N}+b(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial\eta_1}{\partial N}\right]\Big|_{\xi_1=\eta_1}R(\xi_1,\xi_1;\xi,0)\right\}/R(\xi,\xi;\xi,0)$$

и функционально – интегральное уравнение вида

$$a_2(\xi)\tau(\xi)+b_2(\xi)\tau(\alpha(\xi))=\chi_2(\xi),\ \xi_0\le\xi\le1, \qquad (18)$$

где

$$a_2(\xi)=R(\xi,\xi;\xi,\alpha(\xi))=\exp\left[-\int\limits_{\alpha(\xi)}^{\xi}a(\xi,\xi_1)d\xi_1\right],$$

$$b_2(\xi)=R(\alpha(\xi),\alpha(\xi);\xi,\alpha(\xi))=\exp\int\limits_{\alpha(\xi)}^{\xi}b(\xi_1,\alpha(\xi))d\xi_1,$$

$$\chi_2(\xi) = f_2(\xi) + \int_{\alpha(\xi)}^{\xi} \tau(\xi_1) H_2(\xi,\xi_1)\, d\xi_1,$$

$$f_2(\xi) = 2\psi_2(x) - \sqrt{2}\int_{\alpha(\xi)}^{\xi} \nu(\xi_1) R(\xi_1,\xi_1;\xi,\alpha(\xi))\, d\xi_1,$$

$$H_2(\xi,\xi_1) = \sqrt{2}\left\{\frac{\partial}{\partial N} R(\xi_1,\eta_1;\xi,\alpha(\xi))\Big|_{\xi_1=\eta_1} - 2\left[a(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial \xi_1}{\partial N} + b(\xi_1,\eta_1)\frac{\partial \eta_1}{\partial N}\right] R(\xi_1,\xi_1;\xi,\alpha(\xi))\right\}.$$

Если выполняется условие

$$\Delta_2(\xi) = a_2(\xi)a_2[\alpha(\xi)] - b_2(\xi)b_2[\alpha(\xi)] \neq 0,$$

или это то же самое условие (8), то функциональное уравнение (18) имеет единственное решение вида

$$\tau(\xi) = \mu_2(\xi) + \int_{\alpha(\alpha(\xi))}^{\xi} G_2(\xi,\xi_1)\tau(\xi_1)\, d\xi_1, \qquad (19)$$

$$\mu_2(\xi) = \left[f_2(\xi)\exp\left(-\int_{\alpha(\alpha(\xi))}^{\alpha(\xi)} a(\alpha(\xi),\xi_1)\, d\xi_1\right) - f_2(\alpha(\xi))\exp\int_{\alpha(\xi)}^{\xi} b(\xi_2,\alpha(\xi))\, d\xi_2 \right] \Big/ \Delta_2,$$

$$G_2(\xi,\xi_1) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\Delta_2} H_2(\alpha(\xi),\xi_1)\exp\displaystyle\int_{\alpha(\xi)}^{\xi} b(\eta_1,\alpha(\xi))\, d\eta_1, & \alpha(\alpha(\xi)) \le \xi_1 \le \alpha(\xi), \\ \dfrac{1}{\Delta_2} H_2(\xi,\xi_1)\exp\left(-\displaystyle\int_{\alpha(\alpha(\xi))}^{\alpha(\xi)} a(\alpha(\xi),\eta_1)\, d\eta_1\right), & \alpha(\xi) \le \xi_1 \le \xi, \end{cases}$$

при этом

$$\max_{[\xi_0,1]}|\mu_2(\xi)| = m_2, \quad |G_2(\xi,\xi_1)| \le M_2.$$

Решение интегрального уравнения (19) будем искать в виде ряда $\tau(\xi) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \tau_\kappa(\xi)$ для которого имеет место неравенство $|\tau(\xi)| \le m_2 \exp M_2$.

Таким образом, интегральное уравнение (19) (а также (18)), при выполнении условия (8) однозначно разрешима.

Следовательно, задача (4), (6) имеет единственное решение вида (9), в которой $\tau(\xi)$ определяются из (17) и (19).

Отметим, что если $A(x,y) = B(x,y) \equiv 0$, то условие (8) невыполнимо. В этом случае уравнение (18) имеет вид

$$\tau(\xi) + \tau(\alpha(\xi)) = f_2(\xi) + \int_{\alpha(\xi)}^{\xi} H_2(\xi,\xi_1)\tau(\xi_1)\, d\xi_1, \quad \xi_0 \le \xi \le 1, \qquad (20)$$

$$H_2(\xi,\xi_1) = \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial N} R(\xi_1,\eta_1;\xi,\alpha(\xi))\Big|_{\xi_1=\eta_1}.$$

Так как интегральный оператор, стоящий в правой части равенства (20) вполне непрерывен, то как показано в [4] функциональное уравнение (20) имеет единственное решение.

Таким образом и в этом случае задача (4), (6) однозначно разрешима .

Теорема для задачи (1), (2) доказана.

Список литературы

1. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. – М.: Наука, 1973. – С. 701.
2. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – С. 164
3. Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. – Алматы: Гылым, 1994. – С. 170
4. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – С. 448.
5. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – С. 301.