

УДК 519.711.3

ИССЛЕДОВАНИЕ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ

Жунусова Л.Х., Тойганбаева Н.А., Текесбаева Н.А.

Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы,
e-mail: khafizovna_66@mail.ru

В настоящее время существует способ теоретического исследования сложных процессов, допускающих математическое описание, компьютерный эксперимент, т. е. исследование естественнонаучных проблем методами вычислительной математики. Математическому исследованию предшествует выбор приближения, т.е. решение вопроса о том, какие факторы надо учесть, а каким можно пренебречь. После этого проводится исследование проблемы методом вычислительного эксперимента. В данной работе исследована задача устойчивости и стабилизации системы описывающих биологический процесс. Получено стабилизирующее управление для исследуемой модели, который обеспечивает устойчивость решение на определенном отрезке времени.

Ключевые слова: билинейная система, стабилизация, управление, аппроксимация

RESEARCH BILINEAR SYSTEMS USING A STABILIZING CONTROL

Zhunussova L.K., Toiganbayeva N.A., Tekesbayeva N.A.

Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, e-mail: khafizovna_66@mail.ru

Currently, there is a method of theoretical investigation of complex processes that allow a mathematical description, a computer-experiment, i.e. natural science research concerns the methods of computational mathematics. Mathematical study precedes the choice of approximation, ie the question of what factors should be taken into account, and which can be ignored. After that, we study the problem by computer simulation. In given work explored problem to stability and stabilizations of the system describing biological process. It Is Received stabilizing management for under investigation model, which provides stability a decision on determined time cell.

Keywords: bilinear system, stabilization, control, approximation

Известно, что структура различных иммунных процессов носит существенно нелинейный, распределенных и стохастический характер, ведущие процессы в большинстве случаев являются билинейными. Если судить по аналогии, то билинейные системы появляются при описании взаимодействия молекул антител с чужеродным веществом.

Анализ биологических систем и управление ими допустимо на основе билинейных моделей, если взаимодействия между составляющими можно будет описать с помощью временных линейных уравнений, принимающих значения из некоторого множества и определяющих действие иерархии. В данной работе рассмотрена система на основе билинейных моделей. Биологическая система требует преодоления жестких ограничений, связанных с требованиями линейности. Другая ее особенность-эта изменчивая структура. Эта свойства является важным в тех случаях, когда на управления накладывается ограничения.

Лемма. Управления вида

$$u^0 = -D^*(t)K(t)x, t \in [t_0, T]$$

осуществляет стабилизацию движения системы:

$$\dot{x}(t) = B(t)x(t) + D(t)u;$$

$$x(0) = x_0; 0 \leq t \leq T.$$

Доказательства данной леммы можно найти [1, 2, 3].

Постановка задачи. Выбором управления $u = u(t)$ требуется стабилизировать движения на конечном отрезке времени.

Пусть $\|u\| \leq M, M = \text{const} \geq 0$ тогда стабилизирующее управление можно представить в виде:

$$u^0 = -D^*(t)K(t)x, t \in [t_0, T]$$

Для решения поставленной задачи взят процесс управления периодическим течением болезни [4, 5]. Этот процесс может быть описан:

$$\dot{x}_1 = k_{x1}(x_2 - x_1),$$

$$\dot{x}_2 = \beta x_2 - x_2 x_3 - 3,$$

$$\dot{x}_3 = k_{x3}(\sigma x_1 - x_2 x_3 - x_3),$$

с начальными условиями: $x_1(0) = x_{10}; x_2(0) = x_{20}; x_3(0) = x_{30},$

где первое уравнение описывает концентрацию зрелых плазматитов, второе уравнение концентрацию антигена третье уравнение описывает концентрацию антител [6, 7].

Используем линеаризованную систему данной модели, которой получаем, пренебрегая членами $x_2 x_3$.

Тогда матрица системы имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} -k_{x1} & k_{x1} & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ k_{x3}\sigma & 0 & -k_{x3} \end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим собственные значения матрицы:

$$\lambda_1 = -k_{x1}, \quad \lambda_2 = \beta, \quad \lambda_3 = -k_{x3}.$$

Как видно решения неустойчивое и мы рассматриваемой модели добавляем стабилизирующее управления на $t \in [t_0, T]$ конечном отрезке: $u^0 = -D^*(t)K(t)x$,

Фундаментальная матрица определяется из уравнения:

$$\dot{\phi}(t) = B(t)\phi(t),$$

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-k_{x1}t} & \alpha_1(e^{\beta t} - e^{-k_{x1}t}) & 0 \\ 0 & e^{\beta t} & 0 \\ \alpha_5(e^{-k_{x1}t} - e^{-k_{x3}t}) & \alpha_2 e^{\beta t} - \alpha_3 e^{-k_{x3}t} + \alpha_4 e^{-k_{x3}t} & e^{-k_{x3}t} \end{pmatrix}$$

Теперь вычислим

$$Q(t) = \phi^{-1}D.$$

Тогда имеем

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ 0 & Q_{22} & 0 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}.$$

После вычислим элементы матрицы:

$$R(t, T) = \int_{t_0}^T Q(\tau) Q^*(t) d\tau.$$

Далее находим

$$W(t, T) = \phi(t) R(t, T) \phi^*(t).$$

Таким образом, решение рассматриваемой системы при стабилизирующем управлении имеет вид:

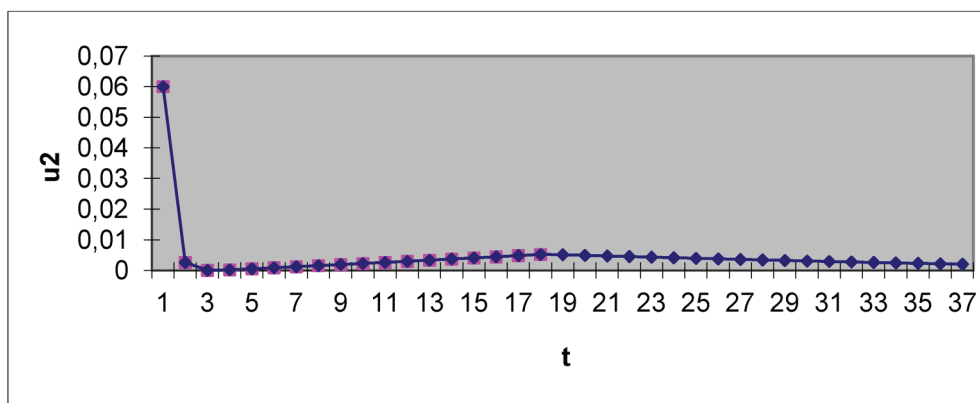
$$\begin{aligned} x_1 &= (\phi_{11}R_{11} + \phi_{12}R_{21})(k_{11} + k_{12} + k_{13}) + (\phi_{11}R_{12} + \phi_{12}R_{23})(k_{21} + k_{22} + k_{23}) + (\phi_{12}R_{13} + \phi_{12}R_{23})(k_{31} + k_{32} + k_{33}), \\ x_2 &= (\phi_{22}R_{22})(k_{11} + k_{12} + k_{13}) + (\phi_{22}R_{22})(k_{21} + k_{22} + k_{23}) + (\phi_{22}R_{22})(k_{31} + k_{32} + k_{33}), \\ x_3 &= (\phi_{31}R_{11} + \phi_{32}R_{21} + \phi_{33}R_{31})(k_{11} + k_{12} + k_{13}) + (\phi_{31}R_{12} + \phi_{32}R_{23} + \phi_{33}R_{31})(k_{21} + k_{22} + k_{23}) + \\ &+ (\phi_{31}R_{13} + \phi_{32}R_{32} + \phi_{33}R_{33})(k_{31} + k_{32} + k_{33}). \end{aligned}$$

А стабилизирующее управление имеет вид:

$$\begin{aligned} u_1 &= -(\sum_{i=1}^{14} D_i e^{d_i t} - \omega_5 - \omega_4^2) x_{10} + (\sum_{i=1}^{21} E_i e^{e_i t} + \omega_2 - \omega_5 - \omega_4 \omega_5) x_{20} + (\sum_{i=1}^{14} F_i e^{f_i t}) x_{30}, \\ u_2 &= -(\sum_{i=1}^{22} G_i e^{g_i t} - \omega_2 \omega_5 - \omega_1 \omega_3) x_{10} + (\sum_{i=1}^{25} H_i e^{h_i t} + \omega_1 - \omega_5 - \omega_3^2) x_{20} + (\sum_{i=1}^{19} L_i e^{l_i t} - \omega_1 - \omega_2 \omega_3) x_{30}, \\ u_3 &= -(\sum_{i=1}^{13} M_i e^{m_i t}) x_{10} + (\sum_{i=1}^{20} N_i e^{n_i t} + \omega_1 - \omega_2 \omega_3) x_{20} + (\sum_{i=1}^1 P_i e^{p_i t} - \omega_1 - \omega_3) x_{30}. \end{aligned}$$

Эти найденные выражения определяют программное управление. Кроме этого, мы

задачу исследовали с помощью численных методов.



Изображение поведения управления u_2 при $1,70 < x_1 < 1,89$, $5,1 < x_2 < 3,2$, $0,9 < x_3 < 6,5$

Рисунок показывает изменение поведения управления, в частности, u_2 . Именно u_2 заменяет билинейность во втором уравнении системы моделируемого процесса. Как видно, в начальный момент времени значения u_2 резко падает и даже достигает нулевого значения. Затем, через два часа, опять восстанавливает свое значение и так плавно приближается к нулю.

Заключение. Оценку близости аппроксимационной модели можно получить, выбирая продолжительность времени $T \geq 0$. Таким образом, мы можем приближенно находить решение билинейной системы через решения линеаризованной системы, обеспечивающее стабилизацию системы на конечном отрезке времени.

Список литературы

1. Бияров Т.Н. Устойчивость движения при постоянно действующих возмущениях. – Алматы: КазНУ, 1989. – 80 с.
2. Джолдасбеков О.А., Бияров Т.Н. Устойчивость и стабилизация движения механизмов и машин – Алматы: ИА РК, 1992. – 82 с.
3. Малкин Н.Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 530 с.
5. Жунусова Л.Х. Об устойчивости и стабилизации билинейных моделей. //Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ, посвященной 100-летию академика С.М. Никольского: тезисы докладов международной конференции 5-7 мая 2005. – М. – 2005. – С.105.
6. Бияров Т.Н. Вопросы управляемости некоторых моделей // Проблемы современной математики и механики: тезисы докладов международной конференции 5-10 октября 2005. / Т.Н. Бияров, Л.Х. Жунусова – Алматы. – 2005. – С. 68.
7. Жунусова Л.Х. The solutions of a sum of control optimization in the class of bilinear systems // Вестник НАН РК № 5, 2007. – С. 26-28.