УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В СИСТЕМЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ ФАКТОРОВ СРЕДЫ

Догучаева С.М.

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва,
e-mail: sv-doguchaeva@yandex.ru

Оптимизация управления и проектирования естественных факторов среды является практически важной областью применения методов математического моделирования природных процессов. В практике научных вычислений при приближенном решении нестационарных задач математической физики все большее внимание уделяется вычислительным алгоритмам повышенной точности [1]. Проблемы воздействия естественных и антропогенных факторов окружающей среды, должны трактоваться как единственно нелинейные, так как линейный подход не позволяет описывать реально наблюдаемые эффекты пространственной локализации (при линейном подходе скорость распространения загрязняющих веществ мгновенна) и стабилизации за конечное время. В то же время это значительно усложняет математические модели, приводя к необходимости исследования локальных и нелокальных задач со свободной границей для нелинейного параболического уравнения. Постоянно изменяющаяся экологическая ситуация требует специальных алгоритмов решения обратных задач, способных работать в реальном времени. Одна из основных задач нашего времени – это организация подготовки специалистов в области геоинформационных технологий и обработки данных с помощью новых аппаратно – программных средств.

Ключевые слова: Поверхности уровня поля концентрации, функция источников, функция стоков, диффузионные процессы

MATHEMATICAL METHODS AND MODELS IN THE SYSTEM IMPACT OF NATURAL ENVIRONMENTAL FACTORS

Doguchaeva S.M.

Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow,
e-mail: sv-doguchaeva@yandex.ru

Optimization of the management and planning of natural hazards is practically important applications of methods of mathematical modeling of natural processes. In practice, scientific computing at the approximate solution of nonstationary problems of mathematical physics increasing emphasis on computational algorithms increased accuracy. Problems of impact of natural and anthropogenic factors of environment, shall be treated as the only nonlinear because the linear approach does not allow to describe the observed effects of spatial localization (in a linear approach the speed of propagation of pollutants instant) and stabilization for the final time. At the same time it considerably complicates the mathematical model, leading to the need for research of local and nonlocal free boundary problems for nonlinear parabolic equations. Constantly changing ecological situation requires special algorithms for solving inverse problems, able to work in real time. One of the main tasks of our time is the organisation of training specialists in the field of geoinformation technologies and data processing with the help of new hardware and software.

Keywords: Surface level of the concentration fields, function of sources, function drains, the diffusion processes

Сложный многоуровневый характер природных процессов делает практически невозможным их точный математический расчет, в связи с этим, уже на стадии математического моделирования для создания численно аналитических методов расчета, реализуемых с помощью компьютерных технологий и программного обеспечения, приходится делить их на несколько подуровней. [5] Особенный интерес при изучении задач локального загрязнения окружающей среды представляют тяжелые аэрозоли. [4]. Диффузионные процессы, протекающие в атмосфере и океане, представляют собой практически важную задачу, связанную с решением различных проблем защиты окружающей среды от загрязнения [3]. Как правило, эти процессы носят турбулентный [3] характер и поэтому их теоретическое исследование сопряжено с большими трудностями, возникающими уже на стадии создания и выбором конкретных зависимостей коэффициента турбулентной диффузии K времени T, стоками $f(c)$ и концентрацией диффундирующих примесей с. [4,5] Такое описание возможно только на основании нелинейных моделей, отражающих зависимость турбулентного коэффициента диффузии от концентрации, а также учета ее поглощения, к рассмотрению которых мы и переходим.

При прогнозировании, управлении и оптимизации процессов адвективного переноса и диффузии определяющим являются не поле концентрации $c(p,t)$ [4], а поле поверхности ее уровня. Поэтому в тех случаях, когда это возможно, естественна и необходима формулировка задач со свободными границами [3] в терминах этих определяющих величин, несмотря на существенное усложнение дифференциального уравнения [5], начального и краевых условий [4].

В случаях стремления коэффициента диффузии к нулю в окрестности границы возникают пограничные слои [7]. Но это уже другие постановки задач диффузионных процессов.

В данной работе мы рассмотрим задачу Дирихле для поверхностей уровня поля концентраций. Источник загрязнения здесь обозначается через *w*. [3]

Постановка задачи. Если на известной части $S(t)$ ограниченной поверхности области W(t) задано краевое условие Дирихле, то для определения поля концентраций $c(P,t)$ и свободной поверхности $\Gamma(t)$: $\Phi^*(P,t)=0$ получаем систему уравнений:

$$div(Kgradc)-c_t=f(c)-w, P\in\Omega(t), t>0,$$

$$c(P,0)=c_0(P), P\in\bar{\Omega}(0)$$

$$c(P,t)=\varphi(P,t), P\in S(t), t>0, \quad (1)$$

$$c(P,t)=0, K\frac{\partial c}{\partial n}(P,t)=0, P\in\Gamma(t), t>0.$$

Поверхности уровня скалярного поля концентрации $c=c(P,t)$ [5] определяет в неявной форме однопараметрическое семейство поверхностей уровня $\Phi(P,c,t)$, где $\Phi(P,c,t)=c(P,t)=c$. Если краевое условие Дирихле таково, что область $\Omega(t)$ расслаивается изотермическими поверхностями, то концентрацию *c* можно считать монотонной функцией одной из координат, например, *z*, при фиксированных значениях *x,y,t*. Это дает возможность с помощью специального преобразования типа Мизеса $c(x,y,z,t)\leftrightarrow z(x,y,c,t)$ перейти от задачи определения поля концентрации $c(x,y,z,t)$ к задаче определения поля ее поверхностей уровня $z(x,y,c,t)$. Такое преобразование позволяет избавиться от необходимости определения свободной поверхности [4], так как концентрация при этом выступает в роли независимой переменной и значение $c=0$ соответствует этой поверхности – $\Gamma(t): z=z(x,y,0,t)$, и для поверхностей уровня $z=z(x,y,c,t)$ получить следующую начально – краевую задачу:

$$Az=\frac{\partial z}{\partial t}+\left[f(c)-w(z)\right]\frac{\partial z}{\partial c},$$

$$\Omega_c(t)=\left\{(x,y)\in D; 0<c<\bar{c}(x,y,t)\right\}, t>0,$$

$$z(x,y,c,0)=z_0(x,y,c),\ x,y,c\in\bar{\Omega}(0), \quad (2)$$

$$z(x,y,c,t)=z_s(x,y,c,t),$$

$$x,y\in D,\ c=\bar{c}(x,y,t), t>0,$$

$$K\frac{z_n}{z_c}=0, c=0, t>0,$$

где $z=z_s(x,y,t)$ – уравнение известной поверхности $S(t)$;

$$z_n=\partial z/\partial n,\ z_c=\partial z/\partial c;$$

n – внешняя нормаль к ∂D;

$$Az=\nabla_\tau(K\nabla_\tau z)-\frac{\partial}{\partial c}\left(K\frac{(\nabla z)^2}{\partial z/\partial c}\right), \quad (3)$$

∇_τ – тангенциальная часть оператора $grad$. При постановке задачи (2) мы воспользовались формулами дифференцирования обратных функций, которые приводят к следующим соотношениям:

$$div(Kgradc)=-Az/z_c,\ \frac{\partial c}{\partial t}=\frac{z_t}{z_c},\ \frac{\partial c}{\partial t}=-\frac{z_t}{z_c},$$

$$\frac{\partial c}{\partial n}=-\frac{z_n}{z_c}.$$

Одномерная задача. В простейшем одномерном случае задача для определения поля концентраций $c(z,t)$ и свободной поверхности $\Gamma(t)$ [3] и соответствующая задача относительно поля поверхности уровня $z(c,t)$ записываются в виде

$$K\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}-\frac{\partial c}{\partial t}=f(c)-w, 0<z<z(t),\ t>0,$$

$$c(z,0)=c_0(z),\ 0<z<z(0), \quad (1')$$

$$c(0,t)=\bar{c}(t),\ t>0,\ (z(t),t)=0,$$

$$K\frac{\partial c}{\partial n}(z(t),t)=0,\ t>0, \text{ и}$$

$$Az=\frac{\partial z}{\partial t}-[f(c)-w]\frac{\partial z}{\partial c},$$

$$0<c<\bar{c}(t),\ t>0, \quad (2')$$

$$z(c,0)=z_0(c),\ 0<c<\bar{c}(t),$$

$$z\left(\bar{c}\left(t\right),t\right)=0\ ,\ t>0\ ,$$

где $f\left(c\right):\ f_c(c)>0\ ,\ \ f\left(0\right)=0$ – функция стоков; $\bar{c}\left(t\right)$ – монотонно неубывающая функция времени

$$A\left(z\right)=-\frac{\partial}{\partial c}\left[K\frac{1}{\partial z/\partial c}\right]=K\frac{z_c}{z_c^2}\ . \quad (3')$$

Монотонность оператора A и нахождение единственности решения задачи для поверхностей уровня (2′) в процессе загрязнения атмосферы.

Для установления свойства монотонности оператора A воспользуемся известной первой формулой Грина

$$\int\limits_0^{\bar{c}(t)} vAzdc=-K\frac{v}{z_c}+K\int\limits_0^{\bar{c}(t)}\frac{v_c}{z_c}dc\ . \quad (4)$$

Полагая в (4) $v=z_2-z_1$ и первый раз $z=z_1$, а второй $z=z_2$, где $z_1=z_1(c,t),\ z_2=z_2\left(c,t\right)$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, определенные на $\left(0,\bar{c}\left(t\right)\right)$, получим два равенства

$$\int\limits_0^{\bar{c}}\left(z_2-z_1\right)Az_1dc=-K\frac{z_2-z_1}{z_{1c}}+K\int\limits_0^{\bar{c}(t)}\frac{\left(z_2-z_1\right)_c}{z_{1c}}dc\ \ , \quad (5)$$

$$\int\limits_0^{\bar{c}(t)}\left(z_2-z_1\right)Az_2dc=-K\frac{z_2-z_1}{z_{2c}}+K\int\limits_0^{\bar{c}(t)}\frac{\left(z_2-z_1\right)_c}{z_{2c}}dc\ . \quad (6)$$

Вычитая (5) из (6), получаем следующее соотношение:

$$\int\limits_0^{\bar{c}(t)}\left(Az_2-Az_1\right)\left(z_2-z_1\right)dc=-K\left[\left(z_2-z_1\right)\left(\frac{1}{z_{2c}}-\frac{1}{z_{1c}}\right)\right]+$$
$$+K\int\limits_0^{\bar{c}(t)}(z_2-z_1)_c\left(\frac{1}{z_{2c}}-\frac{1}{z_{1c}}\right)dc,$$

которое после простого преобразования подынтегрального выражения во втором слагаемом правой части записывается в виде

$$\int\limits_0^{\bar{c}(t)}\left(Az_2-Az_1\right)\left(z_2-z_1\right)dc=-K\left[\left(z_2-z_1\right)\left(\frac{1}{z_{2c}}-\frac{1}{z_{1c}}\right)\right]-$$
$$-\frac{K}{2}\int\limits_0^{\bar{c}(t)}\frac{\left(z_2-z_1\right)_c^2}{z_{1c}\,z_{2c}}\ . \quad (7)$$

Пусть теперь

$z_1=z_1\left(c,t\right),\ z_2=z_2\left(c,t\right)$ – два различных решения задачи (2′). Тогда, в силу краевых условий первое слагаемое из (7) равно нулю, а подынтегральное выражение во втором слагаемом, в силу монотонности функций $z_1\left(c,t\right)$ и $z_2\left(c,t\right)$ по $c\left(z_{1c}\ .z_{2c}>0\right)$, положительно. Следовательно, первая формула Грина для оператора задачи (2′) окончательно запишется в виде

$$\int\limits_0^{\bar{c}(t)}\left(Az_2-Az_1\right)\left(z_2-z_1\right)dc=-\frac{K}{2}\int\limits_0^{\bar{c}(t)}\frac{\left(z_2-z_1\right)_c^2}{z_{1c}\,z_{2c}}\ . \quad (8)$$

Так как правая часть равенства (8) не положительна, то отсюда следует монотонность оператора A на решениях задачи (2′).

Используя свойство монотонности оператора A, докажем единственность решения задачи (2′). Для этого с помощью дифференциального уравнения задачи исключим из (8) Az_1 и Az_1. Имеем

$$\int_0^{\bar{c}(t)} \left(Az_2 - Az_1\right)\left(z_2 - z_1\right) dc = \int_0^{\bar{c}(t)} \left(z_2 - z_1\right)\left\{\left(z_{2t} - z_{1t}\right) - f\left(c\right)\left(z_{2c} - z_{1c}\right) + \right.$$

$$\left. + w(z_{2c} - z_{1c})\right\} dc = \frac{1}{2}\int_0^{\bar{c}(t)} \left\{ \left(z_2 - z_1\right)_t^2 + w\left(z_2 - z_1\right)_c^2 \right\} dc -$$

$$- \int_0^{\bar{c}(t)} f\left(c\right)\left(z_2 - z_1\right)_c^2 dc \ . \qquad (9)$$

Интегрируя по частям последний интеграл, учитывая граничные условия задачи (2′) свойства функции $f(c)$, перепишем (9) в виде

$$\int_0^{\bar{c}(t)} \left(Az_2 - Az_1\right)\left(z_2 - z_1\right) dc = \frac{1}{2}\int_0^{\bar{c}(t)} \left\{ \left(z_2 - z_1\right)_t^2 + w\left(z_2 - z_1\right)_c^2 \right\} dc +$$

$$+ \int_0^{\bar{c}(t)} f_c\left(c\right)\left(z_2 - z_1\right)^2 dc \ . \qquad (10)$$

Как нетрудно видеть, правая часть полученного равенства неотрицательна. Однако выше было сказано, что правая часть не положительна (см. (8)). Из полученного противоречия следует, что $z_1\left(c,t\right) = z_2\left(c,t\right)$.

Таким образом, мы приходим к следующему основному выводу:

Если функция источников $w = \text{const}$, функция стоков $f(c)$ монотонно возрастает и $f\left(0\right) = 0$, то решение одномерной задачи Дирихле (2′) для поверхностей уровня положительно и единственно.

К основным процессам самоочищения или рекреации, с учетом их результативности, следует отнести химические реакции, микробиологическое окисление, процессы адсорбции и распада. Восстановительная способность атмосферы представляется с помощью функции распределения стоков загрязнения $f = f(c)$ [3].

При разработке неотложных мер по экологической проблеме, существенную роль играют математические модели переноса и диффузии в стратифицированных водной и воздушной средах, позволяющие производить расчеты и давать прогнозы. При построении разностных схем для задач гидродинамики, тепло- и массопереноса большое внимание уделяется так же монотонным схемам [2].

Современные практики и исследователи отмечают, что в настоящее время влияние человека на природу достигает такого размаха, что естественные регуляторные механизмы уже не в состоянии самостоятельно нейтрализовать многие нежелательные и вредные его последствия. Экологическая политика должна учитывать взаимозависимость между природными средами, технологиями производства, загрязнения и сокращения загрязнения, между самими загрязняющими веществами. Это, конечно необходимо учитывать при разработке долгосрочных программ [6].

Господствующие в обществе социальные установки оказывают решающее влияние на его экономику и системы управления. Надо уметь создавать перспективы, раскрывая потенциал сотрудников, клиентов и общества в целом [4]. Грань, отделяющая сегодняшнее состояние нашей планеты от экологической катастрофы настолько тонка, что речь надо вести не об «экологии вообще», а о размерах отклонений экологических характеристик нашей среды обитания от значений минимально необходимых для жизнедеятельности обитателей планеты.

Список литературы

1. Вабищевич П. Н. Двухслойные схемы повышенного порядка аппроксимации для нестационарных задач математической физики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2010. – Т.50. – №1. – С. 118–130.

2. Вабищевич П.Н. Самарский А.А. Монотонные разностные схемы для задач конвекции-диффузии на треугольных сетках // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2002. – Т. 42. № 9. – С. 1368. – 1382.

3. Догучаева С.М. Качественное исследование нелинейных задач параболического типа в области применения новых информационных технологий. «Информатизация и связь». -М:2013 №1.- С.31-34.

4. Догучаева С.М. Системный подход в экономико-математическом моделировании // Научные итоги 2013 года: достижения, проекты, гипотезы. – Новосибирск: 2013. – С. 167-172.

5. Догучаева С.М. Новые процессы разработки для определения эколого-экономической ценности природных ресурсов// Международный технико-экономический журнал. – М: 2013 №6. – С.74-78.

6. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблемах окружающей среды. – М.: Наука, 1982. – 320 с.

7. Шишкин Г.И., Аппроксимация систем сингулярно возмущенных эллиптических уравнений реакции-диффузии с двумя параметрами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – М.: 2007. – Т. 47. № 5. – С 835 – 866.