«Инновационные технологии в высшем и профессиональном образовании», Испания (Коста дель Азаар), 2-9 августа 2013 г.

Физико-математические науки

ОБ ИЗУЧЕНИИ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С СУММИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Митрохин С.И.

НИВЦ МГУ им. М.В. Ломоносова, Королёв, e-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

Рассмотрим следующую краевую задачу для дифференциального оператора второго порядка с суммируемым потенциалом:

$$-y''(x)+q(x)\cdot y(x)=\lambda a^2\cdot y(x), 0\le x\le\pi, a>0, \quad (1)$$

с многоточечными граничными условиями:

$$y(0)=a_1\cdot y\left(\frac{\pi}{3}\right)+a_2\cdot y\left(\frac{2\pi}{3}\right), y(\pi)=a_3\cdot y\left(\frac{\pi}{3}\right)+a_4\cdot y\left(\frac{2\pi}{3}\right), a_k\in R, \quad (2)$$

$$q(x)\in L_1[0;\pi]\left(\text{т.е. }\left(\int_0^x q(t)dt\right)'_x=q(x)\text{ почти всюду для всех } x\in[0;\pi]\right),$$

на коэффициенты $a_k\ (k=1,2,3,4)$ в дальнейшем будут наложены дополнительные условия.

Методика нахождения асимптотики решений дифференциального уравнения (1) при больших значениях спектрального параметра l в случае суммируемого потенциала $q(x)$ изложена автором в работах [1, 2].

<u>Теорема 1.</u> Пусть $\lambda=s^2, s=\sqrt{\lambda}$, причём зафиксируем ту ветвь корня, для которой $\sqrt{1}=+1$.

Общее решение дифференциального уравнения (1) имеет следующий вид:

$$y(x,s)=C_1\cdot y_1(x,s)+C_2\cdot y_2(x,s), y'(x,s)=C_1\cdot y_1'(x,s)+C_2\cdot y_2'(x,s), \quad (3)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, при этом линейно независимые решения $y_1(x,s)$ и $y_2(x,s)$ имеют при $|s|\to\infty$ следующие асимптотики:

$$y_1(x,s)=e^{aisx}+\frac{1}{2ais}\left[e^{aisx}\cdot\int_0^x q(t)dt-e^{-aisx}\int_0^x q(t)\cdot e^{2aisx}dt\right]+\underline{O}\left(\frac{1}{s^2}\cdot e^{|\mathrm{Im}\, s|x}\right), \quad (4)$$

$$y_2(x,s)=y_1(x,-s)=e^{-aisx}+\frac{1}{2ais}\left[e^{aisx}\cdot\int_0^x q(t)\cdot e^{-2aisx}dt-e^{-aisx}\int_0^x q(t)dt\right]+\underline{O}\left(\frac{1}{s^2}\cdot e^{|\mathrm{Im}\, s|x}\right), \quad (5)$$

аналогичные формулы справедливы для функций $y_1'(x,s)$ и $y_2'(x,s)$.

Подставляя формулы (3), (4), (5) в граничные условия (2), приходим к следующему выводу.

<u>Теорема 2.</u> Уравнение на собственные значения краевой задачи (1) – (2) имеет следующий вид

$$f(s)=\begin{vmatrix} y_1(0,s)-a_1\cdot y_1\left(\frac{\pi}{3},s\right)-a_2\cdot y_1\left(\frac{2\pi}{3},s\right) & y_2(0,s)-a_1\cdot y_2\left(\frac{\pi}{3},s\right)-a_2\cdot y_2\left(\frac{2\pi}{3},s\right) \\ y_1(\pi,s)-a_3\cdot y_1\left(\frac{\pi}{3},s\right)-a_4\cdot y_1\left(\frac{2\pi}{3},s\right) & y_2(\pi,s)-a_3\cdot y_2\left(\frac{\pi}{3},s\right)-a_4\cdot y_2\left(\frac{2\pi}{3},s\right) \end{vmatrix}=0. \quad (6)$$

Введем следующую замену:

$$z=e^{a\cdot\frac{\pi}{3}\cdot is}\ne 0. \quad (7)$$

Тогда уравнение (6) с помощью формул (4), (5), (7) принимает вид

$$f(s)=f_0(s)+\frac{f_1(s)}{2ais}+\frac{f_2(s)}{4a^2s^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)=0, \tag{8}$$

где $f_0(s)=\left(z^3-\frac{1}{z^3}\right)+(a_1+a_4)\left(z^2-\frac{1}{z^2}\right)+(a_1a_4-a_2a_3-a_2-a_4)\left(z-\frac{1}{z}\right).$

Основное приближение уравнения (8) представляет собой уравнение $f_0(s)=0$, которое всегда имеет корни $z_1=1$ и $z_6=-1$, и ещё какие-то четыре корня. Очень важный вид граничных условий вида (2) получается в случае

$$a_1+a_4=4, a_1a_4-a_2a_3-a_2-a_4=5, \tag{9}$$

Соотношения (9) наблюдаются очень часто, например, если a_1 – любое, a_2 – любое $(a_2\neq-1)$, $a_3=\frac{4a_1-a_1^2-a_2-5}{a_2+1}, a_4=4-a_1$.

В случае (9) уравнение $f_0(s)=0$ имеет критические корни:

$$z_1=z_2=z_3=z_4=z_5=1, z_6=-1. \tag{10}$$

Аналогично работе [3] получаем следующий результат.

Теорема 3. В случае (9) – (10) асимптотику собственных значений краевой задачи (1) – (2) следует искать в следующем виде:

$$s_{k,m}=6k+\frac{T_{1,km}}{\sqrt[5]{k}}+\frac{T_{2,km}}{\sqrt[5]{k}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{k^3}}\right), m=1,2,3,4,5; k=1,2,3,...,$$

где коэффициенты $T_{1,km}$, $T_{2,km}$ зависят от $q(x)$ и могут быть найдены методами работ [1] и [3].

Список литературы

1. Митрохин С.И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвёртого порядка с суммируемыми коэффициентами // Вестник Московского ун-та. Сер. 1 «Математика, механика». – 2009. № 3 – С. 14-17.

2. Митрохин С.И. Спектральные свойства краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений с суммируемыми коэффициентами // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т.46, № 8. – С. 1085-1093.

3. Митрохин С.И. О «расщеплении» кратных в главном собственных значений многоточечных краевых задач // Известия ВУЗов. Серия: математика. – 1997. - № 3(418). – С. 38-43.

«Проблемы качества образования», Турция (Анталия), 16-23 августа 2013 г.

Физико-математические науки

ЭФФЕКТ «РАСЩЕПЛЕНИЯ» ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

Митрохин С.И.

НИВЦ МГУ им. М.В. Ломоносова, Королёв, e-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

В этой статье изучим спектральные свойства многоточечной краевой задач и для дифференциального оператора четвёртого порядка:

$$y^{(4)}(x)+q(x)\cdot y(x)=\lambda a^4\cdot y(x), 0\le x\le\pi, a>0, \tag{1}$$

с граничными условиями вида:

$$y(0)=0, y''(0)=0, y(\pi)=\alpha\cdot y\left(\frac{\pi}{2}\right), y''(\pi)=\beta\cdot y\left(\frac{\pi}{2}\right), \alpha\in R, \beta\in R. \tag{2}$$

Потенциал $q(x)$ может быть гладким ($q(x)\in C^4[0;\pi]$), как это было в работе [1], а может быть интегрируемым на отрезке $[0;\pi]$ ($q(x)\in L[0;\pi]$), как это было в работе [2]. Основной вопрос нашего исследования: когда будет наблюдаться эффект «расщепления» кратных в главном собственных значений дифференциального оператора (1) – (2)? Этот эффект впервые был отмечен и изучен автором в работе [3]. Пусть $\lambda=s^4, s=\sqrt[4]{\lambda}$, причем для корректности наших дальнейших вычислений зафиксируем ту ветвь арифметического корня, для которой $\sqrt[4]{1}=1$. Пусть w_k $(k=1,2,3,4)$ – различные корни четвёртой степени из единицы: