$$y''(0)=b_{12}\cdot y'(0)+b_{13}\cdot y(0);\;\; b_{22}\cdot y'(0)+b_{23}\cdot y(0)=0;\;\; y''(\pi)=b_{32}\cdot y'(\pi)+b_{33}\cdot y(\pi).$$

В качестве примера таких разделённых граничных условий рассмотрим следующие:

$$y(0)=y'(0)=y(\pi)=0. \qquad (6)$$

По терминологии Наймарка М.А. [4, с. 66-77] граничные условия (6) являются нерегулярными. Ранее асимптотика собственных значений краевых задач с нерегулярными граничными условиями (даже в случае гладкого потенциала) фактически не изучалась.

Теорема 2. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)-(2) с граничными условиями (6) имеет следующий вид:

$$s_{k,2}=\frac{2\sqrt{3}}{3a}\cdot\tilde{k}+\frac{d_{2k,2}}{a\cdot\tilde{k}^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^4}\right),\;\; \tilde{k}=k-\frac{1}{6},\;\; k=1,2,3,\dots, \qquad (7)$$

$$d_{2k,2}=-\frac{\sqrt{3}}{6\pi}\left[\int_0^\pi q(t)\,dt-\int_0^\pi q(t)\cdot\cos\left((2t-\pi)\left(k-\frac{1}{6}\right)\right)dt\right], k=1,2,3,\dots \qquad (8)$$

Список литературы

1. Митрохин С.И. Асимптотика решений дифференциального уравнения третьего порядка с суммируемыми коэффициентами // Вопросы математики, механики сплошных сред и применения математических методов в строительстве: Сб. научных трудов. Вып. 12. – М.: МГСУ, 2010. – С.38-48.
2. Митрохин С.И. Спектральные свойства краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений с суммируемыми коэффициентами // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т.46, № 8. – С. 1085-1093.
3. Митрохин С.И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвёртого порядка с суммируемыми коэффициентами// Вестник Московского ун-та. Сер. 1, «Математика, механика». – 2009. № 3 – С. 14-17.
4. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

Актуальные проблемы образования», Греция (Крит), 18-25 октября 2013 г.

Физико-математические науки

ОБ ОДНОЙ НЕРЕШЁННОЙ ПРОБЛЕМЕ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ С СУММИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Митрохин С.И.

НИВЦ МГУ им. М.В. Ломоносова, Королёв, e-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

Рассмотрим дифференциальное уравнение четвёртого порядка:

$$y^{(4)}(x)+q_3(x)\cdot y^{(3)}(x)+\sum_{k=1}^{3}q_{3-k}(x)\cdot y^{(3-k)}(x)= =\lambda a^4\cdot y(x), 0\le x\le\pi, a>0 \qquad (1)$$

с граничными условиями

$$y(0)=y''(0)=y(\pi)=y''(\pi)=0, \qquad (2)$$

где λ – спектральный параметр, коэффициенты $q_m(x)(m=0,1,2,3)$ – суммируемые функции на отрезке $[0;\pi]$:

$$q_m(x)\in L_1[0;\pi](=)\left(\int_0^x q_m(t)\,dt\right)'_x=q_m(x) \text{ почти всюду на отрезке } [0;\pi]. \qquad (3)$$

В случае $q_3(0)\equiv 0, q_2(0)\equiv 0$ асимптотика решений дифференциального уравнения (1) изучена в работе [1]. В случае $q_3(x)\neq 0$ в монографии М.А. Наймарка [2, глава 2, с. 53] указана замена $y(x,s)=e^{-\frac{1}{4}\cdot\int_0^x q_3(t)dt}\cdot g(x,s)$, позволяющая преобразовать уравнение (1) к более простому виду:

$$g^{(4)}(x)+0\cdot g^{(3)}(x)+\sum_{k=1}^{3}\tilde{q}_{3-k}(x)\cdot g^{(3-k)}(x)=\lambda\cdot a^4\cdot g(x), 0\le x\le\pi, a>0.$$

Но это замена осуществима, только если $q_3(x)\in C^3[0;\pi]$, в случае $q_3(x)\in L_1[0;\pi]$ она не проходит. В [1] доказана теорема.

Теорема.

Решение $y(x,s)$ дифференциального уравнения (1) имеет вид:

$$y(x,s)=\sum_{k=1}^{4}C_k\cdot e^{aw_k sx}-\frac{1}{4a^3s^3}\cdot\sum_{k=1}^{4}w_k\cdot e^{aw_k sx}\cdot\int_0^x e^{-aw_k st}\cdot\left[q_3(t)\cdot y^{(3)}(t,s)+\sum_{p=1}^{3}q_{3-p}(t)\cdot y^{(3-p)}(t,s)\right]\cdot dt, \qquad (4)$$

где C_k – произвольные постоянные, $\lambda=s^4, s=\sqrt[4]{\lambda}\left(\sqrt[4]{1}=+1\right), w_k^4=1, w_k=e^{\frac{2\pi i}{4}(k-1)}\left(k=1,2,3,4\right)$.

Метод последовательных приближений (см. [1]) к интегральному уравнению (4) в случае $q_3(x)\in L_1[0;\pi]$ также неприменим. Вопрос: как искать асимптотику решений уравнения (1)?

Список литературы

1. Митрохин С. И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвёртого порядка с суммируемыми коэффициентами // Вестник Московского ун-та. Сер. 1 «Математика, механика». – 2009. № 3 – С. 14-17.

2. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

«Фундаментальные исследования», Израиль (Тель-Авив), 16-23 октября 2013 г.

Физико-математические науки

ОБ АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СЛОЖНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВОСЬМОГО ПОРЯДКА С СУММИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Митрохин С.И.

НИВЦ МГУ им. М.В. Ломоносова, Королёв, e-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

Рассмотрим следующую краевую задачу для дифференциального оператора восьмого порядка:

$$y^{(8)}(x)+u(x)\cdot y^{(3)}(x)+r(x)\cdot y''(x)+p(x)\cdot y'(x)+ \\ +q(x)\cdot y(x)=\lambda a^8\cdot y(x),\quad 0\le x\le\pi,\quad a>0, \qquad (1)$$

с граничными условиями вида

$$y(0)=y''(0)=y^{(4)}(0)=y^{(6)}(0)=y(\pi)=y''(\pi)=y^{(4)}(\pi)=y^{(6)}(\pi)=0. \qquad (2)$$

Предполагается, что все коэффициенты уравнения (1) являются суммируемыми на отрезке

$$[0;\pi]: u(x), p(x), r(x), q(x)\in L[0;\pi], \qquad (3)$$

при этом напомним:

$$h(x)\in L[0;\pi]\Leftrightarrow\left(\int_0^x h(t)\,dt\right)'_x=h(x)$$

почти всюду на отрезке $[0;\pi]$.

Для изучения граничных условий (2) необходимо изучить асимптотику решений дифференциального уравнения (1) при больших значениях спектрального параметра l. Будем следовать методике, разработанной автором в работах [1, 2, 3] для дифференциальных операторов второго и четвертого порядков.

Пусть $\lambda=s^8, s=\sqrt[8]{\lambda}, \sqrt[8]{1}=+1$. Пусть $w_k\left(k=1,2,...,8\right)$ – различные корни восьмой степени из единицы:

$$w_k^8=1,\quad w_k=e^{\frac{2\pi i}{8}(k-1)}\quad(k=1,2,...,8),\quad \sum_{k=1}^{8}w_k^m=0\quad(m=1,2,...,7). \qquad (4)$$

<u>Теорема 1.</u> Решение $y(x,s)$ дифференциального уравнения (1) является решением следующего интегрального уравнения Вольтерры:

$$y(x,s)=\sum_{k=1}^{8}C_k\cdot e^{aw_k sx}-\frac{1}{8a^7s^7}\cdot\sum_{k=1}^{8}w_k e^{aw_k sx}\cdot\int_0^x M(t)\cdot e^{-aw_k st}dt, \qquad (5)$$

где

$$M(x)=u(x)\cdot y^{(3)}(x)+r(x)\cdot y''(x)+p(x)\cdot y'(x)+q(x)\cdot y(x). \qquad (6)$$

Доказать формулы (5) – (6) можно непосредственным дифференцированием этих формул с учётом гладкости коэффициентов (3) и свойством (4) и подстановкой получившихся выражений в дифференциальное уравнение (1).