$$y(x,s)=\sum_{k=1}^{4}C_k\cdot e^{aw_k sx}-\frac{1}{4a^3s^3}\cdot\sum_{k=1}^{4}w_k\cdot e^{aw_k sx}\cdot\int_0^x e^{-aw_k st}\cdot\left[q_3(t)\cdot y^{(3)}(t,s)+\sum_{p=1}^{3}q_{3-p}(t)\cdot y^{(3-p)}(t,s)\right]dt, \quad (4)$$

где C_k – произвольные постоянные, $\lambda=s^4, s=\sqrt[4]{\lambda}\left(\sqrt[4]{1}=+1\right), w_k^4=1, w_k=e^{\frac{2\pi i}{4}(k-1)}\ (k=1,2,3,4)$.

Метод последовательных приближений (см. [1]) к интегральному уравнению (4) в случае $q_3(x)\in L_1[0;\pi]$ также неприменим. Вопрос: как искать асимптотику решений уравнения (1)?

Список литературы

1. Митрохин С. И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвёртого порядка с суммируемыми коэффициентами // Вестник Московского ун-та. Сер. 1 «Математика, механика». – 2009. № 3 – С. 14-17.
2. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

«Фундаментальные исследования», Израиль (Тель-Авив), 16-23 октября 2013 г.

Физико-математические науки

ОБ АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СЛОЖНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВОСЬМОГО ПОРЯДКА С СУММИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Митрохин С.И.

НИВЦ МГУ им. М.В. Ломоносова, Королёв, e-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

Рассмотрим следующую краевую задачу для дифференциального оператора восьмого порядка:

$$y^{(8)}(x)+u(x)\cdot y^{(3)}(x)+r(x)\cdot y''(x)+p(x)\cdot y'(x)+ +q(x)\cdot y(x)=\lambda a^8\cdot y(x),\quad 0\le x\le\pi,\quad a>0, \quad (1)$$

с граничными условиями вида

$$y(0)=y''(0)=y^{(4)}(0)=y^{(6)}(0)=y(\pi)=y''(\pi)=y^{(4)}(\pi)=y^{(6)}(\pi)=0. \quad (2)$$

Предполагается, что все коэффициенты уравнения (1) являются суммируемыми на отрезке

$$[0;\pi]: u(x), p(x), r(x), q(x)\in L[0;\pi], \quad (3)$$

при этом напомним:

$$h(x)\in L[0;\pi]\Leftrightarrow\left(\int_0^x h(t)\,dt\right)'_x=h(x)$$

почти всюду на отрезке $[0;\pi]$.

Для изучения граничных условий (2) необходимо изучить асимптотику решений дифференциального уравнения (1) при больших значениях спектрального параметра l. Будем следовать методике, разработанной автором в работах [1, 2, 3] для дифференциальных операторов второго и четвертого порядков.

Пусть $\lambda=s^8, s=\sqrt[8]{\lambda}, \sqrt[8]{1}=+1$. Пусть $w_k\ (k=1,2,...,8)$ – различные корни восьмой степени из единицы:

$$w_k^8=1,\quad w_k=e^{\frac{2\pi i}{8}(k-1)}\quad (k=1,2,...,8),\quad \sum_{k=1}^{8}w_k^m=0\quad (m=1,2,...,7). \quad (4)$$

<u>Теорема 1.</u> Решение $y(x,s)$ дифференциального уравнения (1) является решением следующего интегрального уравнения Вольтерры:

$$y(x,s)=\sum_{k=1}^{8}C_k\cdot e^{aw_k sx}-\frac{1}{8a^7s^7}\cdot\sum_{k=1}^{8}w_k e^{aw_k sx}\cdot\int_0^x M(t)\cdot e^{-aw_k st}dt, \quad (5)$$

где

$$M(x)=u(x)\cdot y^{(3)}(x)+r(x)\cdot y''(x)+p(x)\cdot y'(x)+q(x)\cdot y(x). \quad (6)$$

Доказать формулы (5) – (6) можно непосредственным дифференцированием этих формул с учётом гладкости коэффициентов (3) и свойством (4) и подстановкой получившихся выражений в дифференциальное уравнение (1).

Уточним асимптотические выражения (5) методом последовательных приближений Пикара: находим $y(t,s), y'(t,s), y''(t,s)$ и $y^{(3)}(t,s)$ из формулы (5) и снова подставляем в (5), получая при этом, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Общее решение дифференциального уравнения (1) имеет следующий вид:

$$y(x,s)=\sum_{k=1}^{8} C_k\cdot y_k(x,s),\quad y^{(m)}(x,s)=\sum_{k=1}^{8} C_k\cdot y_k^{(m)}(x,s),\quad m=1,2,...7, \tag{7}$$

где

$$y_k(x,s)=e^{aw_k sx}-\frac{w_k^3}{8a^4s^4}\cdot g_k(x,s)-\frac{w_k^2}{8a^5s^5}\cdot v_k(x,s)-\frac{w_k}{8a^6s^6}\cdot \phi_k(x,s)-\frac{m_k(x,s)}{8a^7s^7}+$$
$$+\frac{h_k(x,s)}{64a^8s^8}+\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\, s|x}}{s^9}\right),\quad k=1,2,...,8; \tag{8}$$

$$g_k(x,s)=\sum_{n=1}^{8} w_n\cdot e^{aw_n sx}\cdot\int_0^x u(t)\cdot e^{a(w_k-w_n)st}dt,\quad k=1,2,...,8; \tag{9}$$

$$v_k(x,s)=\sum_{n=1}^{8} w_n\cdot e^{aw_n sx}\cdot\int_0^x r(t)\cdot e^{a(w_k-w_n)st}dt,\quad k=1,2,...,8; \tag{10}$$

$$\phi_k(x,s)=\sum_{n=1}^{8} w_n\cdot e^{aw_n sx}\cdot\int_0^x p(t)\cdot e^{a(w_k-w_n)st}dt,\quad k=1,2,...,8; \tag{11}$$

$$m_k(x,s)=\sum_{n=1}^{8} w_n\cdot e^{aw_n sx}\cdot\int_0^x q(t)\cdot e^{a(w_k-w_n)st}dt,\quad k=1,2,...,8; \tag{12}$$

$$h_k(x,s)=\sum_{j=1}^{8}\frac{w_k^3}{w_j^4}\cdot\left[\sum_{n=1}^{8} w_n\cdot e^{aw_n sx}\cdot\int_0^x u(t)\cdot e^{a(w_k-w_n)st}\cdot\left(\int_0^t u(\xi)\cdot e^{a(w_k-w_j)s\xi}d\xi\right)dt\right],\quad k=1,2,...,8. \tag{13}$$

Аналогичные асимптотические формулы справедливы для функций

$$y_k^{(m)}(x,s),\quad k=1,2,...,8;\quad m=1,2,...,7\,.$$

Формулы (7) – (13) позволяют изучить асимптотику собственных значений краевой задачи (1) – (2), как это было сделано ранее в работах [1, 2, 3].

Список литературы

1. Митрохин С.И. Спектральные свойства краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений с суммируемыми коэффициентами // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т.46, № 8. – С.1085-1093.
2. Митрохин С.И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвёртого порядка с суммируемыми коэффициентами // Вестник Московского ун-та. Сер.1, математика, механика. – 2009. № 3 – С. 14-17.
3. Митрохин С.И. О спектральных свойствах дифференциального оператора с суммируемым потенциалом и гладкой весовой функцией // Вестник СамГУ – естественнонаучная серия. – 2008. № 8/1(67). – С.172-187.

«Актуальные проблемы науки и образования», Дюссельдорф–Кельн, 2-9 ноября 2013 г.

Физико-математические науки

ОБ АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Митрохин С.И.

НИВЦ МГУ им. М.В. Ломоносова, Королёв, e-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

Рассмотрим дифференциальный оператор, заданный дифференциальным уравнением четвёртого порядка:

$$(-1)^n\cdot y^{(2n)}(x)+q(x)\cdot y(x)=\lambda\cdot a^{2n}\cdot y(x),\quad 0\le x\le\pi, a>0 \tag{1}$$

где λ – спектральный параметр, с граничными условиями

$$y(0)=y''(0)=...=y^{(2n-2)}(0)=y(\pi)=y''(\pi)=...=y^{(2n-2)}(\pi)=0\,, \tag{2}$$

причём $n\in\{1,2,3,...\}$, а потенциал $q(x)$ является действительнозначной и суммируемой функцией на отрезке $[0;\pi]$: