Задача 4. Поглощение светового потока тонким слоем воды пропорционально количеству падающего на него света и толщине слоя. Слой воды толщиной 35 см поглощает половину падающего на него света. Какую часть света поглотит слой воды толщиной в 2 м?

Решение задачи приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dx} = -ky,$$

где $y(t)$ – количество света, прошедшего через слой в x, см; k – коэффициент пропорциональности.

Задача 5. Известно, что чем выше над уровнем моря, тем воздух разряженнее – атмосферное давление с высотой уменьшается. Определить зависимость $p = p(h)$ давления от высоты h.

Решение задачи приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{dp(h)}{dh} = -g\rho(h),$$

где $\rho(h)$ – плотность воздуха на высоте h; g – ускорение свободного падения.

Задача 6. Пусть в начальный момент тело массой m имеет температуру T_0. Температура окружающей среды постоянна и равна T_c, $T_0 > T_c$. Найти закон охлаждения тела.

Решение задачи приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_c\right),$$

где k – коэффициент пропорциональности.

В нашей работе [1] приведено достаточно большое число задач (физики, теоретической механики, сопротивление материалов, гидравлики, теории машин и механизмов, химии, технологии производства, биологии, экологии, финансово-экономическим дисциплинам и др.), решение которых приводит к дифференциальным уравнениям.

Эти примеры показывают, что дифференциальные уравнения являются действенным математическим аппаратом, через который реализуются основные задачи естествознания.

Элективный курс «Дифференциальные уравнения», рассчитанный на 32 часа, может быть такого содержания.

1. Из истории развития дифференциальных уравнений – 2 часа.

2. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка.

2.1. Геометрический способ решения дифференциальных уравнений – 2 часа.

2.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными – 2 часа.

2.3. Обыкновенные дифференциальные уравнения – 2 часа.

2.4. Уравнения, сводящиеся к однородным – 2 часа.

2.5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка – 2 часа.

2.5.1. Метод Лагранжа – 2 часа.

2.5.2. Метод Бернулли – 2 часа.

2.6. Уравнения Бернулли – 2 часа.

2.7. Уравнения в полных дифференциалах – 2 часа.

2.8. Уравнения Лагранжа и Клеро – 2 часа.

3. Дифференциальные уравнения высших порядков.

3.1. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка – 2 часа.

3.2. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков – 2 часа.

3.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами – 2 часа.

4. Решение дифференциальных уравнений с помощью компьютерных математических пакетов.

Список литературы

1. Далингер В.А., Симонженков С.Д. Моделирование с помощью дифференциальных уравнений: учебное пособие – Омск: ООО ИПЦ «Сфера», 2008. – 44 с.

2. Далингер В.А., Васяк Л.В. Профессионально ориентированные задачи по математике для студентов инженерных специальностей: учебное пособие. – Омск: ООО ИПЦ «Сфера», 2007. – 60 с.

3. Жарова Н.Р., Кузнецова Л.Г. Дифференциальные уравнения: учебное пособие для студентов высших педагогических учебных заведений. – Нижневартовск: Изд-во НГУ, 2009. – 135 с.

4. Сулейменов Ж. Методика преподавания дифференциальных уравнений: учебное пособие. – Алматы: Изд-во «Казак университетi», 2009. – 200 с.

5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008. – 240 с.

6. Хеннер Е.К., Шестаков А.П. Математическое моделирование: пособие для учителя. – Пермь: Изд-во ПГПУ, 1995. – 260 с.

ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС «РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ»

Далингер В.А.

Омский государственный педагогический университет, Омск, e-mail: dalinger@omgpu.ru

В российской системе образования на старшей ступени общеобразовательной школы реализуется профильное обучение учащихся. Гибкую систему профильного обучения обеспечивает разнообразная комбинация учебных предметов.

Учебные планы включают базовые общеобразовательные предметы, профильные общеобразовательные предметы и элективные курсы, занимающие в учебном плане соответственно 50, 30 и 20 %.

Элективные курсы – средство создания пространства индивидуальной познавательной деятельности учащихся. Являясь вариативной частью профильного обучения, элективные курсы позволяют в большей мере, чем базовые и профильные, построить процесс обучения с учетом способностей, склонностей и потребностей учащихся.

Одной из важнейших задач элективов в условиях профильного обучения является знакомство учащихся со спецификой ведущих для данного профиля видов деятельности, что способствует профильному самоопределению школьников.

Идея элективных курсов в системе профильного обучения предполагает самостоятельное проектирование этих курсов учителем, предоставление учителю больших возможностей в выборе содержания, подборе форм и методов при проектировании и организации элективных курсов.

Элективные курсы могут быть двух типов: предметно-ориентированные и межпредметные. В физико-математическом профиле эффективным будет предметно-ориентированный элективный курс «Решение уравнений высших степеней», рассчитанный на 12 часов.

Его содержание и тематическое планирование могут быть такими:

1. Из истории решения уравнений высших степеней – 2 часа;

2. Решение уравнений третьей степени – 4 часа;

3. Решение уравнений четвертой степени – 4 часа;

4. Решение уравнения Муавра (уравнение пятой степени) – 2 часа.

Рассмотрим содержание некоторых вопросов предложенного элективного курса.

1. Решение уравнений третьей степени.

Общее уравнение третьей степени имеет вид:

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

где a_1, a_2, a_3 – произвольно заданные параметры. Его можно свести к уравнению $z^3 + az + b = 0$, имеющему более простой вид. Для этого из первых двух слагаемых выделим полный куб:

$$x^3 + 3\left(\frac{a_1}{3}\right)x^2 + \left(3\left(\frac{a_1}{3}\right)^2 x + \left(\frac{a_1}{3}\right)^3\right) - \left(\frac{a_1^2}{3} + \frac{a_1^3}{27}\right) + a_2x + a_3 = 0;$$

$$\left(x + \frac{a_1}{3}\right)^3 + \left(a_2 - \frac{a_1^2}{3}\right)x + a_3 - \frac{a_1^3}{27} = 0.$$

Теперь можно переписать уравнение для переменной z:

$$z = x + \frac{a_1}{3}; \quad z^3 + \left(a_2 - \frac{a_1^2}{3}\right)z - \left(a_2 - \frac{a_1^2}{3}\right)\cdot\frac{a_1}{3} + a_3 - \frac{a_1}{27} = 0.$$

Итак,

$$a = a_2 - \frac{a_1^2}{3}; \quad b = a_3 - \frac{a_1a_2}{32} + \frac{2a_1^3}{7}.$$

Уравнение примет вид $z^3 + az + b = 0$. Его тоже называют общим уравнением третьей степени. Для его решения используют метод Гудде (Гудде Иоганн – голландский математик, 1633-1704), который состоит в представлении переменной z в виде суммы двух частей: $z = u + v$.

Подставим $u + v$ вместо z *в* уравнение $z^3 + az + b = 0$. Будем иметь

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + a(u + v) + b = 0.$$

Выберем следующее дополнительное условие: $3uv = -a$. Согласно этому условию будем иметь уравнение $u^3 + v^3 = -b$.

В итоге имеем систему:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -b, \\ uv = -\dfrac{a}{3}. \end{cases}$$

Если возвести в куб второе уравнение системы, то она превращается в систему Виета относительно переменных $u^3 + v^3$ для квадратного трехчлена

$$t^2 + bt - \frac{a^3}{27}.$$

Дискриминант последнего имеет специальное обозначение:

$$\frac{D}{4} = \Delta = \frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}.$$

Его неотрицательность означает возможность нахождения корня у общего уравнения третьей степени методом Гудде. Корни этого квадратного трехчлена имеют вид: $-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\Delta}.$.

Значит,

$$z = u + v = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\Delta}}.$$

Последняя формула носит название формулы Кардано (Кардано Джероламо – итальянский математик, 1501–1576).

2. Решение общего уравнения четвертой степени.

Общее уравнение четвертой степени $x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$ можно привести к виду $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$, перейдя к переменной $x + \frac{a_1}{4}$. Последнее уравнение также называется общим уравнением четвертой степени.

Для его решения можно использовать метод Гудде, разложение на множители, метод Феррари.

Метод Гудде

Представим корень (удвоенный) в виде трех слагаемых $2x = u + v + w$. Умножим обе части уравнения на 16 и подставим последнюю формулу в него:

$$(2x)^4 + 4a(2x)^2 + 8b(2x) + 16c = \left(u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + vw + uw)\right)^2 +$$
$$+4a\left(u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + vw + uw)\right) + 8b(u + v + w) + 16c =$$
$$= \left(u^2 + v^2 + w^2\right)^2 + 4\left(u^2 + v^2 + w^2\right)(uv + vw + uw) + 4\left(u^2v^2 + v^2w^2 + u^2w^2\right) +$$
$$+8uvw(u + v + w) + 4a\left(u^2 + v^2 + w^2\right) + 8a(uv + vw + uw) + 8b(u + v + w) + 16c = 0.$$

На слагаемые в последней формуле наложим два условия.

Пусть в последней формуле второе и шестое слагаемые в сумме будут равны нулю:

$$4\left(u^2 + v^2 + w^2\right)(uv + vw + uw) + 8a(uv + vw + uw) = 0.$$

Для этого достаточно наложить условие:

$$u^2 + v^2 + w^2 = -2a\cdot$$

Пусть, кроме того, четвертое и седьмое слагаемые в сумме будут равны нулю:

$$8uvw(u + v + w) + 8b(u + v + w) = 0.$$

Для этого достаточно наложить условие: $uvw = -b$.

С учетом наложенных условий перепишем исходное уравнение:

$$(-2a)^2 + 4\left(u^2v^2 + v^2w^2 + u^2w^2\right) + 4a(-2a) + 16c = 0.$$

Оно эквивалентно уравнению:

$$u^2v^2 + v^2w^2 + u^2w^2 = a^2 - 4c.$$

В результате получаем систему:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = -2a, \\ u^2v^2 + v^2w^2 + u^2w^2 = a^2 - 4c, \\ uvw = -b. \end{cases}$$

Если последнее уравнение системы возвести в квадрат, то относительно квадратов переменных получится система из теоремы Виета для уравнения третьей степени. Другими словами, уравнение:

$$z^3 + 2az^2 + \left(a^2 - 4c\right)z - b^2 = 0$$

имеет корни: $z_1 = u^2$, $z_2 = v^2$, $z_3 = w^2$.

Для решения общего уравнения четвертой степени нужно решить данное уравнение третьей степени, вычислить квадратные корни из корней этого уравнения и положить: $2x = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}$. Однако таким образом получается восемь решений (знак у каждого из корней можно выбрать двумя способами). Но не все эти решения соответствуют решениям системы и, значит, корням исходного уравнения.

Выберем знаки у квадратных корней $u = \sqrt{z_1}$; $v = \sqrt{z_2}$; $w = \sqrt{z_3}$ таким образом, чтобы выполнялось условие $uvw = -b$.

Это условие будет выполняться, если одновременно у двух корней изменить знак на противоположный. В итоге получаем все четыре корня общего уравнения четвертой степени:

$$x_1 = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3};$$
$$x_2 = \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3};$$
$$x_3 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3};$$
$$x_4 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}.$$

Разложение на множители.

Разложим левую часть общего уравнения четвертой степени в произведение двух квадратных трехчленов с неопределенными коэффициентами:

$$x^4 + ax^2 + bx + c = \left(x^2 + u_1x + v_1\right)\left(x^2 + u_2x + v_2\right) = 0.$$

Если нам удастся выразить u_1, u_2, v_1, v_2 через коэффициенты исходного уравнения, то мы легко найдем все его корни, решив два квадратных уравнения.

Раскрывая скобки, мы получим уравнение:

$$x^4 + u_2x^3 + v_2x^2 + u_1x^3 + u_1u_2x^2 + u_1v_2x + v_1x^2 + u_2v_1x + v_1v_2 = 0;$$
$$x^4 + (u_1 + u_2)x^3 + (v_1 + v_2 + u_1u_2)x^2 + (u_1v_2 + u_2v_1)x + v_1v_2 = 0.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = 0, \\ v_1 + v_2 + u_1 u_2 = a, \\ u_1 v_2 + u_2 v_1 = b, \\ v_1 v_2 = c. \end{cases}$$

Первое и последнее уравнения системы дают возможность избавиться от двух переменных: $u = u_1 = -u_2$; $v = v_1 = \frac{c}{v_2}$. В результате получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} v + \frac{c}{v} - u^2 = a, \\ \frac{cu}{v} - uv = b. \end{cases}$$

Выберем такие переменные t_1 и t_2, чтобы $u^2 = t_1 t_2$, $v^2 = \frac{t_2}{t_1}$. Для этого достаточно положить

$$t_1 = \frac{u}{v}, \quad t_2 = uv.$$

Тогда первое уравнение системы перепишется в виде

$$\sqrt{\frac{t_2}{t_1}} + c\sqrt{\frac{t_1}{t_2}} - t_1 t_2 = a;$$

второе уравнение системы перепишется в виде $t_2 = ct_1 - b$.

Умножив обе часть первого уравнения на $\sqrt{t_1 t_2}$, можно переписать его в виде

$$t_2 + ct_1 = \sqrt{t_1 t_2}\left(t_1 t_2 + a\right).$$

Теперь подставим в него t_2 из второго уравнения и возведем обе части в квадрат:

$$\left(ct_1 - b + ct_1\right)^2 = t_1\left(ct_1 - b\right)\left(t_1\left(ct_1 - b\right) + a\right)^2.$$

Здесь удобно перейти к переменной $t = 2ct_1 - b$ и умножить обе части на $64c^3$. Тогда уравнение перепишется в виде:

$$64c^3 t^2 = \left(t + b\right)\left(t - b\right)\left(\left(t - b\right)\left(t + b\right) + 4ac\right)^2 = \left(t^2 - b^2\right)\left(t^2 - b^2 + 4ac\right)^2.$$

Удобно ввести новую переменную $z = \frac{t^2 - b^2}{4c}$, тогда уравнение перепишется в виде:

$$4cz + b^2 = z\left(z + a\right)^2 = z^3 + 2az^2 + a^2 z$$

(мы предварительно разделили обе части уравнения на $64c^3$).

Мы получим точно такое же вспомогательное кубическое уравнение

$$z^3 + 2az^2 + \left(a^2 - 4c\right)z - b^2 = 0,$$

что и при решении методом Гудде.

Метод Феррари

Феррари Лудовико – итальянский математик 1522–1565 гг. (ученик Дж. Кардано).

Идея этого метода состоит в том, чтобы представить левую часть общего уравнения четвертой степени в виде разности квадратов.

Она близка к идее предыдущего метода, так как из разности квадратов возникает разложение в произведение двух квадратных трехчленов.

Подберем такой параметр *t,* чтобы следующее выражение представляло собой разность квадрата квадратного трехчлена и квадратного линейного выражения:

$$x^4 + ax^2 + bx + c = \left(x^2 + t + \frac{a}{2}\right)^2 - 2tx^2 + bx + c - \left(t + \frac{a}{2}\right)^2.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы дискриминант квадратного трехчлена $2tx^2 - bx + \left(t + \frac{a}{2}\right)^2 - c$ равнялся нулю.

$$D = b^2 - 8t\left(\left(t + \frac{a}{2}\right)^2 - c\right) = b^2 - 2t\left(\left(a + 2t\right)^2 - 4c\right) = 0.$$

Положив $z = 2t,$ получим прежнее вспомогательное уравнение:

$$z^3 + 2az^2 + \left(a^2 - 4c\right)z - b^2 = 0.$$

Замечание. Все три метода приводят к одному и тому же вспомогательному кубическому уравнению. Это наводит на мысль, что общее уравнение четвертой степени решается по существу только одним методом, хотя и возможны различные подходы.

Некоторые доводы в подтверждение этой мысли читатель найдет в книге [3].

3. Уравнение Муавра

Муавр Абрахан де – английский математик 1667–1754 гг.

Уравнение Муавра – это уравнение пятой степени, имеющее вид:

$$z^5 - 5az^3 + 5a^2 z - 2b = 0,$$

где a и b – параметры.

Решим это уравнение методом Гудде.

Подставим в уравнение

$$z = u + v.$$

Будем иметь:

$$u^5 + v^5 + 5uv\left(u^3 + v^3\right) + 10u^2v^2\left(u + v\right) - 5a\left(u^3 + v^3\right) -$$
$$-15auv\left(u + v\right) + 5a^2\left(u + v\right) - 2b = 0.$$

Внешний вид слагаемых, имеющих множитель $5\left(u^3 + v^3\right)$, приводит к идее выбрать в качестве дополнительного условия уравнение $uv - a = 0$. Это можно увидеть, вынеся за скобки третьего и пятого слагаемых общий множитель $5\left(u^3 + v^3\right)$.

Представим шестое слагаемое в виде

$$-15auv\left(u + v\right) = -10auv\left(u + v\right) - 5auv\left(u + v\right).$$

Слагаемое $-10auv(u + v)$ сгруппируем со слагаемым $10u^2v^2(u + v)$, вынося за скобки общий множитель, получим:

$$10uv\left(u + v\right)\left(uv - a\right).$$

Сгруппируем второе слагаемое $-5auv(u + v)$ со слагаемым $5a^2(u + v)$, вынося за скобку общий множитель, получим:

$$5a\left(u + v\right)\left(a - uv\right).$$

Наложим дополнительные условия: обнуляем все слагаемые, кроме выражения $u^5 + v^5 - 2b$. В результате получаем систему:

$$\begin{cases} u^5 + v^5 = 2b, \\ uv = a. \end{cases}$$

Возведя второе уравнение системы в пятую степень, получим систему Виета относительно переменных u^5 и v^5 для квадратного трехчлена $t^2 - 2bt + a^5$.

Условие неотрицательности дискриминанта есть условие применимости метода Гудде: $b^2 \geq a^5$.

При выполнении этого условия, получаем корень уравнения Муавра:

$$z = \sqrt[5]{b + \sqrt{b^2 - a^5}} + \sqrt[5]{b - \sqrt{b^2 - a^5}}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите уравнения:

а) $x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0,$

б) $x^3 - 3abcdx + a^3c^2d + b^3cd^2 = 0,$

в) $x + a + 3\sqrt[3]{abx} = b.$

2. Решите биквадратное уравнение $x^4 + ax^2 + c = 0$ методом Гудде, разложением на множители, методом Феррари.

Список литературы

1. Далингер В.А. Элективные курсы как средство профильного самоопределения старшеклассников // Образование и культура, как фактор развития региона: материалы Всероссийских Менделеевских чтений. – Тобольск: Изд-во ТГПИ имени Д.И. Менделеева, 2007. – С. 155–157.

2. Далингер В.А., Зубков А.Н. Элективные курсы в системе профильного математического образования // Актуальные проблемы математического образования в школе и педагогическом вузе: материалы IV Всероссийской научно-практической конференции. – Барнаул: Изд-во БГПУ, 2007. – С. 124–149.

3. Колосов В.А. Теоремы и задачи алгебры, теории чисел и комбинаторики. – М.: Гелиос АРВ, 2001. – 256 с.

«Технические науки и современное производство», Франция (Париж), 14-21 октября 2014 г.

Технические науки

МАРБЛИТ ЧЕРНОГО ЦВЕТА НА ОСНОВЕ ОТХОДОВ ГОРНОРУДНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Здоренко Н.М., Бондаренко Н.И., Дюмина П.С., Антропова И.А., Волошко Н.И.

Белгородский инновационно-технологический центр «ТРАНСФЕР», Белгород, e-mail: dnatali@yandex.ru

В настоящее время в производстве неметаллических тугоплавких оксидных материалов используют различные отходы промышленности, в том числе и отходы обогащения железистых кварцитов КМА [1–4].

Отходы обогащения железистых кварцитов КМА имеют тонкодисперсное сыпучее состояние, поэтому могут использоваться при составлении стекольных шихт без предварительной переработки. Оксиды железа, содержащееся в их составе, окрашивают марблит в черный цвет и снижают температуру его варки на 100–150 °С.

В связи с этим нами предложен новый состав шихты для производства марблита черного цвета, в который вводили вместо кварцевого песка данные отходы, а также соду, мел и технический глинозем.

Оптимальный состав шихт определяли с помощью полного факторного эксперимента.

Полученный марблит черного цвета обладал повышенной термостойкостью – более 80 °С и прочностью на изгиб – более 9 МПа.

Таким образом, использование отходов обогащения железистых кварцитов КМА позволит существенно повысить конкурентоспособность марблита черного цвета и снизить его себестоимость.