

УДК 539.3

О ДОСТОВЕРНОСТИ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРУГИХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Мусаев В.К.

МЭСИ, Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Приводится информация о численном моделировании нестационарных упругих волн в сложных деформируемых областях. Задачи решаются с помощью численного моделирования уравнений волновой теории упругости. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать сложные задачи при нестационарных динамических воздействиях. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90. Исследуемая область разбивается по рассматриваемым переменным на конечные элементы первого порядка. В работе рассматривается оценка точности и достоверности результатов численного моделирования волн напряжений в областях сложной формы. Приводится сопоставление с результатами экспериментального, аналитического и численного методов.

Ключевые слова: математическое моделирование, контурное напряжение, круглое отверстие, фотоупругость, подкрепленное отверстие, волновая теория упругости, динамическая теория упругости, дифракция, концентрация напряжений, перемещение, скорость перемещений, ускорение, сейсмическое воздействие, функция Хевисайда, метод конечных элементов, комплекс программ, узловые точки, явная двухслойная схема

ON THE RELIABILITY OF COMPUTER SIMULATION OF NON-STATIONARY ELASTIC STRESS WAVES IN DEFORMABLE BODIES OF COMPLEX SHAPE

Musayev V.K.

MESI, Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Provides information about the numerical simulation of non-stationary elastic waves in complex deformable areas. Problems are solved using numerical modeling of wave equations of the elasticity theory. Based on the finite element method in the movements of the developed algorithm and software package for solving linear flat two-dimensional problems, which allow to solve complex problems under non-stationary dynamic impacts. When developing complex programs used algorithmic language Fortran-90. The study area is divided by the considered variables on the final elements of the first order. This paper considers the evaluation of the accuracy and reliability of results of numerical modeling of stress waves in regions of complex shape. Comparison with experimental, analytical and numerical methods.

Keywords: mathematical modeling, dual voltage, round hole, photoproject supported the hole, the wave theory of elasticity dynamic elasticity theory, diffraction, stress concentration, displacement, velocity, displacement, acceleration, seismic impact, the Heaviside function, finite element method, complex programs, anchor point, an explicit two-layer scheme

В работе приводится информация о практической реализации метода конечных элементов в перемещениях. Основное внимание уделено оценке точности и достоверности численного решения нестационарных динамических задач. В деформируемом теле при импульсном воздействии возникают возмущения различной природы. Они распространяются с конечными скоростями. Величина возмущений зависит от состояния тела и характера деформаций, в виде волн возмущений, называемых волнами напряжений. При интерференции волн напряжений их интенсивности складываются. Они могут достигать значений, превосходящих предел прочности материала. После трехкратного или четырехкратного прохождения и отражения волн напряжений в теле процесс распространения возмущений становится установившимся, напряжения и деформации ус-

редняются, тело находится в колебательном движении.

Некоторые вопросы в области постановки, разработки методики, алгоритма и достоверности результатов численного моделирования нестационарных динамических задач рассмотрены в следующих работах [3–10].

Разработка методики и алгоритма

Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями – используем метод конечных элементов в перемещениях [3–5, 8–10].

Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Чтобы выполнить динамический расчет методом конечных элементов, нужно иметь матрицу жесткости и матрицу инерции конечного элемента.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и векто-

ра внешних сил для тела Γ , записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\bar{H}\ddot{\vec{\Phi}} + \bar{K}\vec{\Phi} = \vec{R}, \vec{\Phi}|_{t=0} = \vec{\Phi}_0, \dot{\vec{\Phi}}|_{t=0} = \dot{\vec{\Phi}}_0, \quad (1)$$

где: \bar{H} – матрица инерции; \bar{K} – матрица жесткости; $\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; \vec{R} – вектор узловых упругих внешних сил.

Соотношение (1) система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями. Таким образом, с помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями привели к линейной задаче Коши (1).

Для интегрирования уравнения (1) конечноэлементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду

$$\bar{H} \frac{d}{dt} \dot{\vec{\Phi}} + \bar{K}\vec{\Phi} = \vec{R}, \frac{d}{dt} \vec{\Phi} = \dot{\vec{\Phi}}. \quad (2)$$

Интегрируя по временной координате соотношение (2) с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_{i+1} &= \vec{\Phi}_i + \Delta t \bar{H}^{-1} (-\bar{K}\vec{\Phi}_i + \vec{R}_i), \\ \dot{\vec{\Phi}}_{i+1} &= \dot{\vec{\Phi}}_i + \Delta t \ddot{\vec{\Phi}}_{i+1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Основные соотношения метода конечных элементов в перемещениях получены с помощью принципа возможных перемещений и конечноэлементного варианта метода Галеркина.

Система уравнений (1) для внутренних и граничных узловых точек, полученная в результате интегрирования уравнения движения теории упругости, должна давать решение, сходящееся к решению исходной системы.

Шаг по временной переменной Δt определяем из следующего соотношения

$$\Delta t = k \frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, r), \quad (4)$$

где: Δl – длина стороны конечного элемента.

Результаты численного эксперимента показали, что при $k = 0,5$ обеспечивается устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек на квазирегулярных сетках.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать сложные задачи при нестационарных волновых воздействиях на уникальные сооружения.

Решение методических задач

Рассматривается задача о воздействии плоской продольной упругой волны на свободное круглое отверстие. Начальные условия приняты нулевыми.

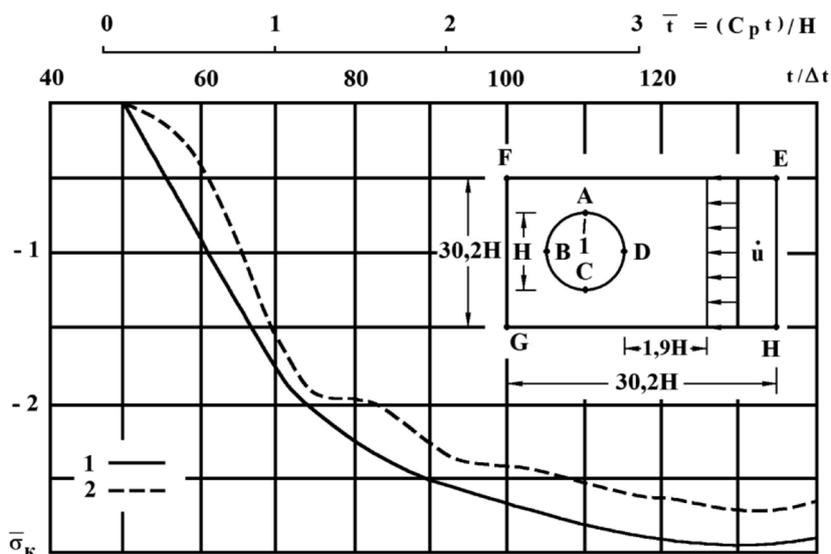
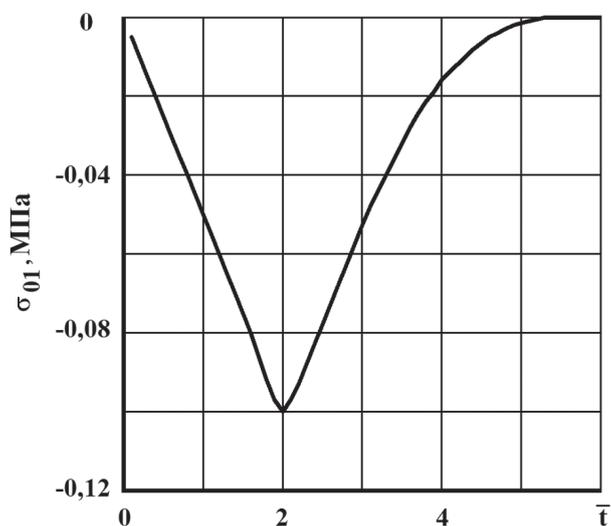


Рис. 1. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 1 во времени \bar{t} на контуре свободного круглого отверстия при воздействии плоской продольной упругой волны типа функции Хевисайда



a)

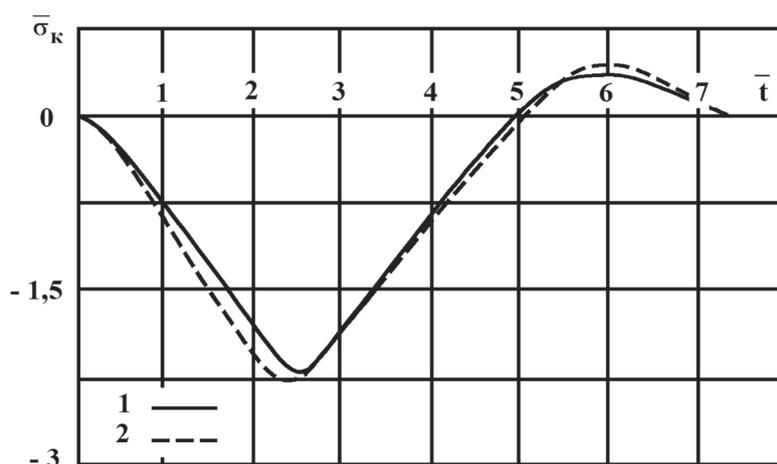


б)

Рис. 2. Экспериментальное воздействие σ_{01} во времени \bar{t} , полученное методом динамической фотоупругости: а – фотограмма картин полос; б – экспериментальное воздействие, принятое при численном решении методом конечных элементов в перемещениях



a)



б)

Рис. 3. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 1 во времени \bar{t} на контуре свободного круглого отверстия при воздействии σ_{01} : а – фотограмма картин полос; б: 1 – экспериментальные результаты, полученные методом динамической фотоупругости; 2 – результаты численного решения, полученные методом конечных элементов в перемещениях

В сечении на расстоянии $1,9H$ (рис. 1) при $0 \leq n \leq 10$ ($n = t/\Delta t$) скорость упругого перемещения \dot{u} изменяется линейно от 0 до P ($P = \sigma_0/(\rho C_p)$) ($\sigma_0 = -0,1$ МПа (-1 кгс/см²)), а при $n \geq 10$ $\dot{u} = P$. Контур круглого отверстия ABCD предполагается свободным от нагрузок при $t > 0$. Граничные условия для контура EFGH при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура EFGH не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 260$. Исследуемая расчетная область имеет 1536 узловых точек. Контур круглого отверстия аппроксимирован 28 узловыми точками.

На рис. 1 показано изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ ($(\bar{\sigma}_k = \sigma_k / |\sigma_0|)$) в точке 1 во времени \bar{t} ($\bar{t} = (C_p t) / H$): 1 – результаты аналитического решения [1, 2]; 2 – результаты численного решения, полученные методом конечных элементов в перемещениях [4, 6–8].

Расхождение для максимального упругого контурного напряжения составляет 6%.

На рис. 2 показано экспериментальное воздействие σ_{01} во времени t , полученное методом динамической фотоупругости: а – фотограмма картин полос; б – экспериментальное воздействие, принятое при численном решении методом конечных элементов в перемещениях.

На рис. 3 показано изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 1 во времени \bar{t} при воздействии σ_{01} : а – фотограмма картин полос; б: 1 – экспериментальные результаты, полученные методом динамической фотоупругости [4, 6–8]; 2 – результаты численного решения, полученные методом конечных элементов в перемещениях [4, 6–8].

Расхождение для максимального упругого контурного напряжения составляет 2%.

Рассматривается задача о воздействии плоской продольной упругой волны на подкрепленное круглое отверстие.

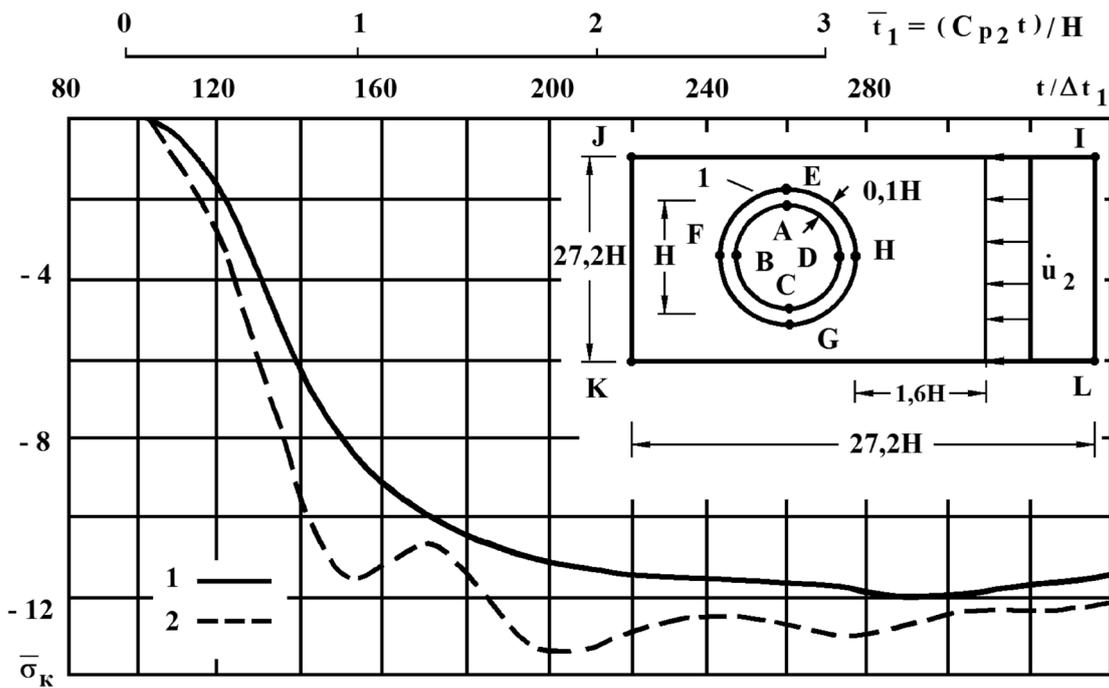


Рис. 4. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 1 во времени \bar{t}_1 на внутреннем контуре подкрепленного круглого отверстия при воздействии плоской продольной упругой волны типа функции Хевисайда

Начальные условия приняты нулевыми. В сечении на расстоянии $1,6H$ (рис. 4) при $0 \leq n_1 \leq 10$ ($n_1 = t/\Delta t_1$) скорость упругого перемещения u_2 изменяется линейно от 0 до $P_1 = \sigma_0/(\rho_2 C_{p2})$, а при $n_1 \geq 10$ $\dot{u}_2 = P_1$.

Внутренний контур подкрепленного отверстия ABCD предполагается свободным от нагрузок при $t > 0$. На границе

подкрепления и среды EFGH приняты условия непрерывности перемещений. Граничные условия для контура IJKL при $t > 0$ $u_2 = v_2 = \dot{u}_2 = \dot{v}_2 = 0$. Отраженные волны от контура IJKL не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n_1 \leq 540$ (...₁ – подкрепление; ...₂ – среда). Исследуемая расчетная область имеет 1536 узловых точек. Внутренний

контур подкрепления аппроксимирован 28 узловыми точками. По толщине подкрепление аппроксимировано двумя узловыми точками.

На рис. 4 показано изменение контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 1 во времени \bar{t}_1 ($\bar{t}_1 = (C_{p2}t)/H$): 1 – результаты аналитического решения [2]; 2 – результаты численного решения, полученные методом конечных элементов в перемещениях [4, 8].

Расхождение для максимального упругого контурного напряжения составляет 12%.

Выводы

Анализ численных результатов показывает, что метод конечных элементов в перемещениях с успехом применяется для решения нестационарных динамических задач.

Проведенные исследования сходимости и устойчивости, сравнение с результатами других методов показало хорошее совпадение, что позволяет сделать вывод о физической и математической достоверности результатов численного решения динамических задач, полученных методом конечных элементов в перемещениях.

Методика, алгоритм, комплекс программ и результаты решенных задач рекомендуются для использования в научно-технических организациях, специализирующихся в области динамического расчета сооружений с окружающей средой при ударных, взрывных и сейсмических воздействиях.

Список литературы

1. Барон М., Мэтьюс А. Дифракция волны давления относительно цилиндрической полости в упругой среде / М. Барон, А. Мэтьюс // Прикладная механика. Труды американского общества инженеров-механиков. – Сер. Е. – 1961. – Т. 28, № 3. – С. 31–38.
2. Гернет Х., Крузе-Паскаль Д. Неустановившаяся реакция находящегося в упругой среде кругового цилиндра произвольной толщины на действие плоской волны расширения / Х. Гернет, Д. Крузе-Паскаль // Прикладная механика. Труды американского общества инженеров-механиков. – Сер. Е. – 1966. – Т. 33, № 3. – С. 48–60.
3. Мусаев В.К. Решение задачи дифракции и распространения упругих волн методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1990. – № 4. – С. 74–78.
4. Мусаев В.К. Численное решение волновых задач теории упругости и пластичности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия прикладная математика и информатика. – 1997. – № 1. – С. 87–110.
5. Мусаев В.К. Математическое моделирование упругих волн напряжений в сложных деформируемых телах // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 1. – С. 62–76.
6. Мусаев В.К. Об оценке достоверности и точности численного решения нестационарных динамических задач // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 3. – С. 48–60.
7. Мусаев В.К. Численное, аналитическое и экспериментальное решение задачи о концентрации нестационарных динамических напряжений в свободном круглом отверстии // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2008. – № 4. – С. 67–71.
8. Мусаев В.К. Оценка достоверности и точности результатов вычислительного эксперимента при решении задач нестационарной волновой теории упругости // Научный журнал проблем комплексной безопасности. – 2009. – № 1. – С. 55–80.
9. Мусаев В.К. Математическое моделирование интерференции нестационарных упругих волн напряжений в виде треугольного импульса от свободной поверхности пластинки / В.К. Мусаев, С.В. Ситник, А.А. Тарасенко, В.Г. Ситник, М.В. Зюбина // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 4; URL: www.science-education.ru/118-14118 (дата обращения: 21.09.2014).
10. Мусаев В.К. Математическое моделирование отражения нестационарных упругих волн напряжений в виде треугольного импульса от свободной поверхности пластинки / В.К. Мусаев, С.В. Ситник, А.А. Тарасенко, В.Г. Ситник, М.В. Зюбина // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 9 (часть 7). – С. 1466–1470; URL: www.rae.ru/fs/?section=content&op=show_article&article_id=10004353 (дата обращения: 21.09.2014).