

УДК 624.131+539.215

РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ УПЛОТНЕНИЯ НАСЛЕДСТВЕННО-СТАРЕЮЩИХ ГРУНТОВ

¹Дасибеков А., ²Юнусов А.А., ¹Айменов Ж.Т., ³Юнусова А.А., ¹Нурмаханбетова Ж.А.¹Южно-казахстанский государственный университет имени М. Ауэзова,

Шымкент, e-mail: Yunusov1951@mail.ru;

²Международный гуманитарно-Технический Университет, Шымкент;³Казахская Академия Труда и Социальных отношений, Алматы

В данной работе исследован процесс уплотнения упругоползучих многофазных грунтовых основан учет старения скелета грунта. Здесь для решения задач механики уплотняемых пористых сред согласно основной модели В.А. Флорина, совместно рассмотрены уравнения, отражающие неразрывность твердой и жидкой фаз грунта, состояние его скелета, а также условия равновесия нестабилизированного состояния уплотняемого грунтового массива. При этом получены разрешающие уравнения механики наследственно – стареющих грунтов при их линейном деформировании. В дальнейшем они решены для различных задач уплотнения, имеющие теоретическое и практическое значение в механике уплотняемых пористых сред. В качестве иллюстраций исследованы одномерная задача уплотнения упругоползучих многофазных стареющих грунтов. Полученные решения задачи отражают распределения давления в поровой жидкости и напряжений в скелете грунта. Они дают возможность определить вертикальные перемещения точек верхней поверхности уплотняемого массива.

Ключевые слова: процесс, уплотнения, грунт, прямоугольник, давление, основания, фундамент, граничные условия

DECISION OF UNIDIMENSIONAL TASK COMPRESSIONS OF HEREDITARILY-SENESCENT SOILS

¹Dasibekov A., ²Yunusov A.A., ¹Aymenov Z.T., ³Yunusova A.A., ¹Nurmaganbetova J.A.¹M. Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent, e-mail: Yunusov1951@mail.ru;²International gumj-technical universiny, Shymkent;³Kazakh Academy of Labour and Social Affairs, Almaty

In this paper we study the process of sealing uprugopolzuchih multiphase ground based view of the aging of the skeleton of the soil. Here for solving problems in the mechanics of the sealing of porous media according to the basic model V.A. Florina jointly considered equations reflecting the continuity of the solid and liquid phases of the soil, the state of his skeleton, and the equilibrium conditions unstabilized compacted soil mass. We obtain the equations of mechanics allow genetically – aging soils during their linear deformation. Later they decided to seal the various tasks that have theoretical and practical importance in the mechanics of the sealing of porous media. As an illustration, one-dimensional problem studied seals uprugopolzuchih multiphase aging soils. The resulting solution of the problem reflects the distribution of pressure in the pore fluid and the stresses in the soil skeleton. They make it possible to determine the vertical movement of the upper surface of the compacted points array.

Keywords: process, of compression, soil, rectangle, pressures, grounds, foundation, border terms

Грунт в общем случае находится в сложном напряженно-деформируемом состоянии, вызванном воздействием внешних нагрузок, передающихся через фундамент и силами собственного веса, т.е. имеет место пространственное сжатие грунта. Однако в инженерной практике часто создаются условия, когда такое состояние уплотняемого массива многокомпонентного грунта сводится к одномерной задаче. К таким случаям относятся уплотнения грунтовых массивов и слоев в основании сооружений, имеющих большие размеры по сравнению с их мощностью.

При одномерном уплотнении элементарный кубик, выделенный из массива грунта, деформируется в условиях отсутствия бокового расширения. Причем направление сжимаемости кубика-образца совпадает с направлением действия наи-

большого главного напряжения. В двух других направлениях деформации равны нулю. В этих условиях относительная деформация уплотнения равна относительной объемной деформации грунта.

Для выяснения общего характера протекания процесса такого уплотнения достаточно будет рассмотреть отдельные решения одномерной задачи теории консолидации, физическая сторона которой не очень отличается от аналогичных решений трехмерных задач. С другой стороны, исследования одномерного уплотнения более доступны, чем двух и трехмерных. Кроме того, это дает возможность при рассмотрении процесса уплотнения учесть некоторые факторы, сильно влияющие на него, в частности, можно указать на одновременный учет неоднородности, старения и ползучести уплотняемых грунтов. В связи с этим

ниже исследуем процесс уплотнения, происходящий в слое трехфазного грунта.

Пусть слой трехфазного грунта мощностью h в момент времени $t = \tau_1$ подвержен действию внешней распределенной нагрузки с интенсивностью $q = q(x_3, t)$. Верхняя поверхность уплотняемого массива водонепроницаемая, а нижняя водонепроницаемая. Тогда решение этой задачи сводится к исследованию совместно трех уравнений. При этом уравнение уплотнения грунта без учета его свойства ползучести имеет вид [6].

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \beta'(1 + \varepsilon_{cp}) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k(1 + \varepsilon_{cp})}{\gamma_e} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}, \quad (1)$$

где ε – коэффициент пористости; β' – коэффициент объемного сжатия; k – коэффициент фильтрации; ε_{cp} – средний коэффициент пористости; γ_e – объемный вес воды; p – давление в поровой жидкости.

Состояние скелета упругоползучего однородного грунта и уравнение равновесия, может быть соответственно математически описаны следующими соотношениями [1]:

$$\varepsilon(z, t) = \varepsilon(\tau_1) - a_0 \sigma(z, t) + \int_{\tau_1}^t \sigma(z, t) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (2)$$

$$\sigma(z, t) + p(z, t) = q(z, t), \quad (3)$$

где

$$\delta(t, \tau) = a_0 + a_1 \phi(t) \cdot [1 - e^{-\gamma_1(t-\tau)}] \quad (4)$$

a_0 – коэффициент сжимаемости, который в общем случае зависит от времени и пространственных координат; $\phi(t)$ – функция старения; a_1, γ_1 – параметры ползучести; $\sigma(z, t)$, $p(z, t)$, $q(z, t)$ – соответственно напряжение, поровое давление и внешняя нагрузка, приложенная на

верхнюю поверхность уплотняемого слоя грунта.

Рассматривая совместно выражения (1)–(4), после некоторых математических выкладок относительно порового давления, получим следующее дифференциальное уравнение в безразмерных координатах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p(\xi, T)}{\partial T^2} + \gamma_1 \left[(1 + a_1 c_0 a^{(1)}) \frac{h^2}{c_{1v}} + \frac{a_1 a^{(1)} A_1}{T} \right] \frac{\partial p}{\partial T} = \gamma_1 \left(\frac{\partial}{\partial T} + \frac{h^2}{c_{1v}} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + \\ + a a^{(1)} \ddot{q} + \gamma_1 \left[(a_1 + a_0 c_0) a^{(1)} \frac{h^2}{c_{1v}} + a_0 A_1 \frac{1}{T} \right] \dot{q}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$c_{1v} = \frac{k(1 + \varepsilon_{cp})}{\gamma_b} a^{(1)}; \quad T = \frac{c_{1v}}{h^2} t; \quad \xi = \frac{z}{h}; \quad a^{(1)} = 1 / [a_0 + \beta_{cp}(1 + \varepsilon_{cp})]. \quad (6)$$

Начальными условиями для данной задачи будут:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial T} \Big|_{T=T_1} + \gamma_1 \left[a_1 a^{(1)} c_0 \frac{h^2}{c_{1v}} + \frac{a_1 a^{(1)} A_1}{T_1} \right] p(\xi, T_1) = \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + a_0 a^{(1)} \dot{q}(\xi, T_1) + \\ + \gamma_1 a_1 a^{(1)} \left[\frac{c_0 h^2}{c_{1v}} + \frac{A_1}{T_1} \right] \cdot q_0(\xi, T_1); \end{aligned} \quad (7)$$

$$p(\xi, T_1) = q_0(\xi, T_1) \quad (8)$$

где

$$q_0(\xi, T_1) = q(\xi, T_1) - p_{cmp},$$

т.е. часть нагрузки, равная величине структурной прочности сжатия p_{cmp} , сразу же воспринимается скелетом грунта; функция старения $\phi(\tau)$, в (5), представлена в виде

$$\phi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau}.$$

Здесь C_0 , A_1 – опытные данные, τ – время приложения нагрузки. Такая задача для постоянной нагрузки исследована в [7].

Если грунт деформируется только в вертикальном направлении, то по теории фильтрационной консолидации сумма избыточного порового давления и эффективного напряжения в грунте $\sigma(\xi, t)$ в любой момент времени равна внешней нагрузке, т.е. $p + \sigma = q$. Движение жидкости при уплотнении неоднородного грунта пусть происходит по модифицированному закону Дарси [2] со скоростью

$$V = -k \left(\frac{1}{\gamma_e h} \cdot \frac{\partial p}{\partial \xi} - I_0 \right), \quad (9)$$

где k – коэффициент фильтрации; γ_e – объемный вес воды; I_0 – начальный градиент напора при фильтрации.

Следовательно, при модифицированном законе Дарси граничные условия исследуемой задачи примут вид

$$p|_{\xi=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = I_0 h \gamma_e. \quad (10)$$

Заменим функцию $p(\xi, t)$ на

$$p(\xi, t) = \bar{p}(\xi, t) + I_0 h \gamma_e \xi, \quad (11)$$

тогда, в безразмерных координатах выражения (10) и (8) представляются в видах:

$$\bar{p}|_{\xi=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0 \quad (12)$$

$$\bar{p}|_{T=0} = q - p_{стр} - I_0 h \gamma_e \xi = q_0 + b_1 \xi, \quad (13)$$

где $b_1 = -I_0 h \gamma_e$.

Уравнения (5), (7) и (8) соответственно имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{p}(\xi, T)}{\partial T^2} + \gamma_1 \left[(1 + a_1 c_0 a^{(1)}) \frac{h^2}{c_{lv}} + \frac{a_1 a^{(1)} A_1}{T} \right] \frac{\partial \bar{p}}{\partial T} = \gamma_1 \left(\frac{\partial}{\partial T} + \frac{h^2}{c_{lv}} \right) \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \xi^2} + \\ + a a^{(1)} \ddot{q} + \gamma_1 \left[(a_1 + a_0 c_0) a^{(1)} \frac{h^2}{c_{lv}} + a_0 A_1 \frac{1}{T} \right] \dot{q}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial T} \right|_{T=T_1} + \gamma_1 \left[a_1 a^{(1)} c_0 \frac{h^2}{c_{lv}} + \frac{a_1 a^{(1)} A_1}{T_1} \right] \bar{p}(\xi, T_1) = \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \xi^2} + a_0 a^{(1)} \dot{q}(\xi, T_1) + \\ + \gamma_1 a_1 a^{(1)} \left[\frac{c_0 h^2}{c_{lv}} + \frac{A_1}{T_1} \right] \cdot q_0(\xi, T_1) - \gamma_1 \left[a_1 a^{(1)} c_0 \frac{h^2}{c_{lv}} + \frac{a_1 a^{(1)} A_1}{T_1} \right] I_0 h \gamma_e \xi \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, данную задачу можно сформулировать следующим образом.

В безразмерных координатах требуется определить давление в поровой жидкости $\bar{p}(\xi, T)$, напряжение в скелете $\sigma(\xi, T)$ и вертикальные перемещения верхней поверхности $S(T)$ (осадок) грунтового слоя в области

$\Omega = \left\{ M \in [0, 1] \right\}_{t > T_1}$, если $\bar{p}(\xi, T)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (14) начальным (15), (13) и граничным (12) условиям при (6).

Решение уравнения (14), удовлетворяющее указанным условиям, представим в виде

$$\bar{p}(\xi, T) = \sum_{j=0}^{\infty} T_j(T) \sin \frac{(2j+1)\pi}{2} \xi, \quad T \in [T_1, T], \quad \xi \in [0, 1], \quad (16)$$

где $T_j(T)$ – неизвестная функция, подлежащая определению. Она зависит только от T . Для определения этой

функции $\bar{p}$ в уравнение (14) вместо функции $\bar{p}(\xi, T)$ подставим (16), тогда получим:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \ddot{T}_j(T) + \gamma_1 \left[\left(1 + a_1 c_0 a^{(1)} \right) \frac{h^2}{c_{lv}} + \beta_j^2 + \frac{a_1 a^{(1)} A_1}{T} \right] \dot{T}_j(T) + \gamma_1 \frac{h^2}{c_{lv}} \beta_j^2 T_j \right\} \times \\ \times \sin \frac{(2j+1)\pi}{2n} \xi = F(\xi, T).$$

Умножив обе части этого уравнения на $\sin \frac{(2j+1)\pi}{2} \xi$, а затем, проинтегрировав полученное выражение в пределах от 0 до 1 по ξ , получим:

$$\ddot{T}_j(T) + \gamma_1 \left[\left(1 + a_1 c_0 a^{(1)} \right) \frac{h^2}{c_{lv}} + \beta_j^2 + \frac{a_1 a^{(1)} A_1}{T} \right] \dot{T}_j(T) + c_{lv}^{-1} h^2 \beta_j^2 \gamma_1 T_j = Q_j(T) \quad (17)$$

Правая часть $Q_j(T)$ этого неоднородного уравнения представляет собой известную непрерывную функцию. Она зависит только от T и имеет вид:

$$Q_j(T) = 2/n \int_0^1 F(\xi, T) \sin \frac{2j+1}{2} \pi \xi d\xi, \quad \beta_j^2 = \left[\frac{(2j+1)\pi}{2} \right]^2, \quad (18)$$

$$F(\xi, T) = a_1 a^{(1)} \ddot{q} + \gamma_1 \left[(a_1 + a_0 c_0) \cdot a^{(1)} \frac{h^2}{c_{lv}} + a_0 A_1 \frac{1}{T} \right] \dot{q} - \\ - \gamma_1 \left[a_1 a^{(1)} c_0 \frac{h^2}{c_{lv}} + \frac{a_1 a^{(1)} A_1}{T_1} \right] I_0 h \gamma_s \xi. \quad (19)$$

Неоднородное уравнение (17) дает возможность определить неизвестную пока функцию T_j , зависящую только от T . Ее можно представить в виде двух слагаемых: где $T_{0j}(T)$ – общее решение однородного уравнения, т.е. без правой части, когда $Q_j = 0$, $T_{1j}(T)$ – частное решение неоднородного уравнения (17). Таким образом, для определения $T_{0j}(T)$ рассмотрим уравнение вида

$$T_j(T) = T_{0j}(T) + T_{1j}(T), \quad (20)$$

$$\ddot{T}_{0j}(T) + \gamma_1 \left[\left(1 + a_1 c_0 a^{(1)} \right) \frac{h^2}{c_{lv}} + \beta_j^2 + \frac{a_1 a^{(1)} A_1}{T} \right] \dot{T}_{0j}(T) + h^2 c_{lv}^{-1} \beta_j^2 \gamma_1 T_{0j}(T) = 0. \quad (21)$$

Если в выражении (21) введем обозначение вида:

$$T_{0j}(T) = T^{1-\beta} \exp \left[-0,5 \left(M_j^{(1)} - \sqrt{[M_j^{(1)}]^2 - 4N_j^{(1)}} \right) \right] \cdot TR_j(T), \quad (22)$$

то уравнение (21) приводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению относительно переменной $R_j(T)$:

$$r_j \ddot{R}_j + (c - r_j) \dot{R}_j - \alpha_j R_j = 0, \quad (23)$$

где

$$M_j^{(1)} = \gamma_1 \left[\left(1 + a_1 c_0 a^{(1)} \right) \frac{h^2}{c_{lv}} + \frac{\beta_j^2}{\gamma_1} \right]; \quad D^{(1)} = a_1 a^{(1)} A_1, \quad (24)$$

$$M_j^{(1)} = \gamma_1 h^2 \frac{\beta_j^2}{c_{lv}}; \quad r_j = \sqrt{[M_j^{(1)}]^2 - N_j^{(1)} T}, \quad c = 2 - D^{(1)};$$

$$a_j = 0,5 \left(M_j^{(1)} - \sqrt{[M_j^{(1)}]^2 - 4N_j^{(1)}} \right);$$

$$\alpha_j = [\beta_j (2 - D^{(1)}) - (1 - D^{(1)}) M_j^{(1)}] / \sqrt{[M_j^{(1)}]^2 - 4N_j^{(1)}}.$$

Решение линейного дифференциального уравнения (23) получим в виде:

$$R_j(r_j) = C_{1j} F(\alpha_j, c, r_j) + C_{2j} G(\alpha_j, c, r_j), \quad (25)$$

здесь $F(\alpha_j, c, r_j)$ и $G(\alpha_j, c, r_j)$ соответственно являются вырожденными гипергеометрическими функциями первого и второго родов.

При этом $F(\alpha_j, c, r_j)$ называется функцией Куммера.

Она разлагается в степенной ряд

$$F(\alpha_j, c, r_j) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j)_k}{(c)_k k!} \cdot r_j^k. \quad (26)$$

Тогда функция $G(\alpha_j, c, r_j)$ через $F(\alpha_j, c, r_j)$ выражается следующим образом:

$$G(\alpha_j, c, r_j) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(\alpha_j - c - 1)} \cdot G(\alpha_j, c, r_j) - \frac{F(1-c)}{F(\alpha_j)} \cdot r_j^{1-c} (1 + \alpha_j - r_j; 1 - c; r_j)$$

Причем ряд (26) сходится при всех r_j .

Далее переходим к определению частного решения неоднородного уравнения (17). Для этого используем метод вариации постоян-

ных, т.е. предположим, что в (25) произвольные постоянные C_{1j} и C_{2j} зависят от T . После определения их, частное решение неоднородного уравнения (17) получится в виде:

$$T_{1j}(T) = \int_{T_1}^T \frac{Q_j(\tau) \{G[r_j(\tau)] \cdot F[r_j(T)] - F[r_j(\tau)] \cdot G[r_j(T)]\}}{G[r_j(\tau)] \cdot \dot{F}[r_j(\tau)] - F[r_j(\tau)] \cdot \dot{G}[r_j(\tau)]} \cdot d\tau. \quad (27)$$

Тогда имея в виду (22) и (27), общее решение неоднородного уравнения (17) приводим к виду:

$$T_j(T) = C_{1j} F[r_j(T)] + C_{2j} G[r_j(T)] + \int_{T_1}^T \frac{Q_j(\tau) \{G[r_j(\tau)] \cdot F[r_j(T)] - F[r_j(\tau)] \cdot G[r_j(T)]\}}{G[r_j(\tau)] \cdot \dot{F}[r_j(\tau)] - F[r_j(\tau)] \cdot \dot{G}[r_j(\tau)]} \cdot d\tau. \quad (28)$$

Таким образом, распределение порового давления в уплотняемом упругоползучем грунтовом массиве мощности h происходит по закону (16). При этом функция T_j , входящая в эту формулу, находится из (28).

Для вычисления осадок $S(T)$ грунта в безразмерной координате используем формулу вида

$$S(T) = \frac{a_0 h}{1 + \varepsilon_0} \int_0^1 \sigma(\xi, T) d\xi, \quad (29)$$

где $\sigma(\xi, T)$ – напряжение в скелете грунта. Оно находится из

$$\sigma(\xi, T) = q(\xi, T) - \sum_{j=0}^{\infty} T_j(T) \sin \frac{(2j+1)\pi}{2} \xi. \quad (30)$$

Подставив выражение (30) в (29), находим

$$S(T) = \frac{a_0 h}{1 + \varepsilon_0} \left[\int_0^1 q(\xi, T) d\xi - \frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_j(T)}{2j+1} \right]. \quad (31)$$

При $T \rightarrow 0$ имеем, что $\sigma(\xi, T) \rightarrow 0$, а при $T \rightarrow \infty$ напряжение стремится к q .

Следовательно, если поровое давление изменится от q до 0, то напряжение принимает значение от 0 до q . При этом $S(T)$ изменится от 0 до

$$S_{\infty} = \frac{a_0 h}{1 + \varepsilon_0} \int_0^1 q(\xi, \infty) d\xi. \quad (32)$$

Если $q(\xi, T) = q = \text{const}$ то из (32) найдем, что $S_{\infty} = \frac{a_0 q h}{1 + \varepsilon_0}$, т.е. неустановившаяся осадка слоя уплотняемого грунта во времени изменяется в диапазонах от 0 до $\frac{a_0 q h}{1 + \varepsilon_0}$.

Для этого случая по расчетным формулам (17), (30) и (31) вычислены их численные значения. При этом получено, что с увеличением мощности уплотняемого грунтового массива максимальное значение порового давления и время его наступления увеличиваются. Причем значения осадки уменьшаются в течение всего периода уплотнения. Так, например, при толщине слоя 5 м и 20 м максимальное значение порового давления отличается более чем 1,5 раза. Причем для толщины 20 м пик более растянут по сравнению с пиком для толщин 5 и 10 м. Это означает, что с увеличением толщины уплотняемого слоя грунта уменьшается скорость нарастания напряжений в скелете грунта, а в уплотняемых грунтовых массивах с малыми мощностями скорость нарастания напряжений в скелете грунта не, только велика, что приводит к отставанию роста деформаций от роста напряжений в скелете грунта. В то же время при большой толщине уплотняемого слоя грунта скорость нарастания напряжений в скелете грунта будет небольшой и деформации уплотнения

вследствие ползучести и старения скелета грунта протекает без заметного отставания.

Таким образом, максимальное значение порового давления в основаниях сооружений зависит от длины пути фильтрации, т.е. от размеров уплотняемого слоя грунта. Причем чем больше мощность уплотняемого грунтового массива, тем медленнее протекает фильтрационные процессы. Это означает, что процесс возрастания порового давления будет продолжаться за счет ползучести и старения скелета грунта.

Задачи в других постановках исследования в [3–5].

Список литературы

1. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. – М.: Гостехтеор-издат, 1952. – 323 с.
2. Абелев М.Ю. Строительство промышленных и гражданских сооружений на слабых водонасыщенных грунтах. – М.: Стройиздат, 1983. – 247 с.
3. Дасибеков А.Д., Юнусов А.А., Юнусова А.А. Айашова А. Уплотнение наследственно-стареющих неоднородных грунтовых оснований. // Научный журнал «Фундаментальные исследования», Москва, 2013. – №8. – С. 323–331.
4. Дасибеков А.Д. Юнусов А.А., Юнусова А.А. Двумерное уплотнение упругоползучих неоднородных грунтовых оснований. // Научно-теоретический журнал «Успехи современного естествознания», Москва, 2013. – №10. – С. 234–239.
5. Дасибеков А., Юнусов А.А., Юнусова А.А., Мадияров Н.К. Многомерные задачи консолидации наследственно-стареющих земляных масс. // Международный журнал экспериментального образования, Москва, 2014. – №8, часть 1. – С. 37–46.
6. Флорин В.А. Основы механики грунтов. – М.: Гостройиздат, 1961. – Т. 2. – 543 с.
7. Цытович Н.А., Тер-Мартirosян З.Г. Основы прикладной геомеханики в строительстве. – М.: «Высшая школа», 1981. – 316 с.