УДК 62-752

О ФОРМАХ ПАРЦИАЛЬНОЙ СВЯЗНОСТИ В КОЛЕБАНИЯХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Елисеев С.В., Трофимов А.Н., Каимов Е.В.

ФГБОУ ВПО «Иркутский государственный университет путей сообщения», Иркутск, e-mail: eliseev_s@inbox.ru

Рассматривается задача взаимодействия элементов в виброзащитной системе, содержащей твердое тело с неподвижной точкой опоры. В такой системе объект защиты в виде твердого тела, совершающего вертикальные колебания относительно положения статического равновесия, взаимодействует с системой, создающей эффекты действия рычажных связей. Предлагается методологическая основа приемов построения математических моделей систем. Используются структурные интерпретации механических колебательных систем в виде эквивалентных в динамическом отношении структурных схем систем автоматического управления. Предложены расчетные схемы и технология учета рычажных связей в упруго-массовой системе. Показано, что тип рычажного механизма оказывает существенное влияние на характер формирования параметров динамического состояния системы. При малой массе рычага и малой его инерционности виброзащитная система может быть упрощена. Вводится понятие квазипружины как некоторого компакта или блока из типовых элементов, который обладает свойствами вступать в соединения с другими элементами и использоваться в преобразованиях как обычный упругий элемент. Передаточное отношение рычажного механизма, также как и тип механизма, могут использоваться для выбора параметров и управления динамического состояния.

Ключевые слова: рычажные связи, квазипружины, приведенная жесткость, адекватность рычажных схем, виброзащита и виброизоляция

ABOUT FORMS OF PARTIAL CONNECTIONS IN OSCILLATIONS OF MECHANICAL SYSTEMS

Eliseev S.V., Trofimov A.N., Kaimov E.V.

FSBEO HPE «Irkutsk State Transport University», Irkutsk, e-mail: eliseev_s@inbox.ru

The problem of interaction of elements in the vibroprotection system containing a rigid body with a motionless point of support is considered. In such system the object of protection in the form of the rigid body making vertical fluctuations concerning position of static balance, interacts with the system creating effects of action of lever ties. The methodological basis of methods of creation of mathematical models of systems is offered. Structural interpretations of mechanical oscillation systems in the form of block diagrams of automatic control systems equivalent in the dynamic relation are used. Settlement schemes and technology of the accounting of lever communications in elastic and mass system are offered. It is shown that the type of the lever gear has essential impact on nature of formation of parameters of a dynamic condition of system. With a small mass of the lever and its small lag effect the vibroprotection system can be simplified. The concept of a quasi-spring as some compact or block from standard elements which possesses properties to enter joints with other elements and to be used in transformations as a usual elastic element is entered. Transmission ratio of the lever gear, also as well as gear type, can be used for a choice of parameters and steering of a dynamic state.

Keywords: lever ties, quasi-springs, generalized elasticity, adequate accounting schemes, vibroprotection and vibration insulation

Формы связей между парциальными структурами в механических колебательных системах в существенной степени определяют возможности динамических состояний взаимодействующих элементов, что нашло отражение во многих известных работах, относящихся к физике, молекулярной механике и теории колебаний [1–5]. Выбор обобщенных координат может оказать большое влияние на формы и содержание взаимодействий, что, в конечном итоге, приводит к формированию критериев связности, получивших значительное развитие в молекулярной механике [1, 3].

В меньшей степени внимание уделяется взаимодействиям элементов механических колебательных систем, отражающих динамические свойства технических систем. В работах [6 ÷ 9] последних лет получили развитие некоторые концептуальные представления о возможностях расширения типового набора элементарных звеньев механических колебательных систем, что, в частности, нашло приложения в теории виброзащитных систем, имеющих в своем составе рычажные механизмы и устройства для преобразования движения [8, 9]. Реализация расширенного набора возникающих форм взаимодействия приводит к необходимости изучения форм связности парциальных систем, что определяется соотношениями различных видов движений отдельных элементов системы, например, вращательных и поступательных движений парциальных структур [10, 11]. Основное внимание при этом имеют критерии связности, при определении которых предполагается симметричность взаимодействий и однородность структур парциальных систем (по размерности взаимодействий).

Вместе с тем, существуют различные разновидности механических колебательных систем, в которых парциальные системы имеют движения различных видов, то есть взаимодействия происходят между твердыми телами, совершающими поступательное и вращательное движения.

Некоторые вопросы динамических взаимодействий в такого рода системах рассмотрены в работах [12, 13], однако особенности проявления рычажных связей и их влияние на свойства механических колебательных систем требуют более детализированного изучения.

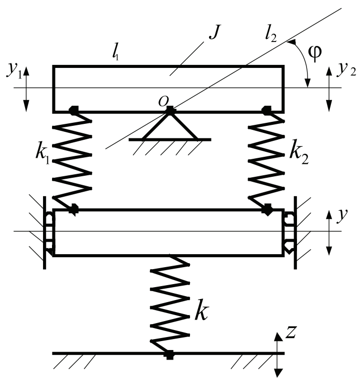

Рис. 1. Расчетная схема системы комбинированного типа (поступательное движение – по координате y; вращательное движение – относительно неподвижной точки O)

В предлагаемой статье развиваются подходы, позволяющие учитывать динамические связи, возникающие в механических колебательных системах при различных видах парциальных движений, в частности, при наличии вращений, что приводит к появлению рычажных связей и соответствующих динамических особенностей. Динамические свойства систем рассматриваются в постановках задач линейной теории виброзащитных систем [6 ÷ 9].

I. Общие положения. Особенности подхода. Рассматривается механическая колебательная система (рис. 1), в которой массоинерционные элементы могут совершать вращательные и поступательные движения. Система имеет две степени свободы движений, которые могут описываться несколькими системами обобщенных координат. Отметим, что при оценке динамических свойств систем необходимо обращать внимание на однородность координат, что связано с вопросами совпадения размерности реакций связей. Между парциальными системами.

Если воспользоваться известной методикой построения математических моделей [6, 7], то уравнения движения при кинематическом возмущении z можно получить, предварительно определив выражения для кинетической и потенциальной энергий:

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{y}\right)^2+\frac{1}{2}J\left(\dot{\varphi}\right)^2; \qquad (1)$$

$$\Pi=\frac{1}{2}k\cdot\left(y-z\right)^2+\frac{1}{2}k_1\cdot\left(y_1-y\right)^2+\frac{1}{2}k_2\cdot\left(y_2-y\right)^2; \qquad (2)$$

Введем ряд соотношений:

$i=\dfrac{l_2}{l_1}$ – передаточное отношение при вращательном движении твердого тела; $y_2=i\cdot y_1$; $y_1=\varphi\cdot l_1$; $y_2=\varphi\cdot l_2$.

Отметим, что y_1 и y_2 имеют различные направления движения. Выражение (2) можно записать в виде:

$$\Pi=\frac{1}{2}k\cdot\left(y-z\right)^2+\frac{1}{2}k_1\cdot\left(\varphi\cdot l_1-y\right)^2+\frac{1}{2}k_2\cdot\left(-\varphi\cdot l_2-y\right)^2. \qquad (3)$$

Проведем ряд вспомогательных преобразований, обычных при использовании формализма Лагранжа [9]. В координатах y и φ система уравнений движения для расчетной схемы на рис. 1 примет вид:

$$m\ddot{y}+y\cdot\left(k+k_1+k_2\right)+\varphi\cdot\left(k_2l_2-k_1l_1\right)=kz; \qquad (4)$$

$$J\ddot{\varphi}+\varphi\cdot\left(k_1l_1^2+k_2l_2^2\right)+y\cdot\left(k_2l_2-k_1l_1\right)=0. \qquad (5)$$

Структурная схема исходной системы (с учетом преобразования Лапласа [6]) в координатах y, φ в соответствии с (4), (5) может быть представлена, как показано на рис. 2.

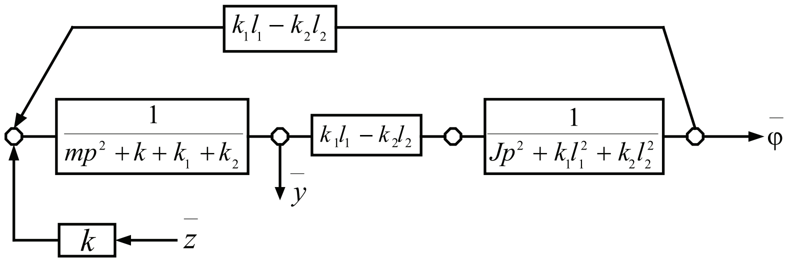

Рис. 2. Структурная схема исходной системы (рис. 1) в координатах y и φ

Структурная схема на рис. 2 может быть преобразована, как показано на рис. 3а, б, в и иметь несколько форм отображения.

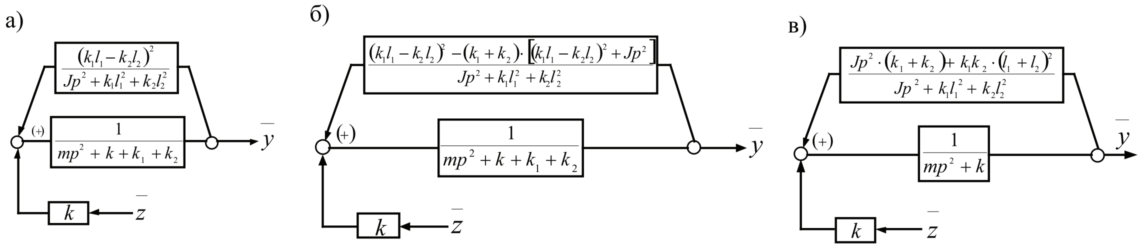

Рис. 3. Преобразование исходной структурной схемы:
а – исключение координаты φ; б – приведение к парциальной системе mp² + k – положительная обратная связь; в – приведение системы к виду с отрицательной обратной связью

Передаточные функции системы могут быть найдены из структурных схем. Вместе с тем, такие же результаты можно непосредственно получить из уравнений (4), (5) после преобразований Лапласа:

$$\bar{\varphi}=\frac{\left(k_1l_1-k_2l_2\right)\cdot\bar{y}}{Jp^2+k_1l_1^2+k_2l_2^2}; \qquad (6)$$

Используем (6) для исключения $\bar{\varphi}$:

$$\bar{y}\cdot\left(mp^2+k\right)+\frac{Jp^2\cdot\left(k_1+k_2\right)+k_1k_2\cdot\left(l_1+l_2\right)^2}{Jp^2+k_1l_1^2+k_2l_2^2}=k\bar{z}. \qquad (7)$$

Если полагать, что парциальная система (по координате *y*) имеет вид $mp^2+k+k_1+k_2$, то уравнение (7) преобразуется:

$$\bar{y}\cdot\left(mp^2+k+k_1+k_2\right)-\frac{\left(k_2l_2-k_1l_1\right)^2}{Jp^2+k_1l_1^2+k_2l_2^2}=kz. \qquad (8)$$

Таким образом, исходная система (рис. 1) может быть приведена путем исключения координаты вращательного движения φ к системе с одной степенью свободы, в которой массоинерционный элемент *m* совершает поступательное прямолинейное движение.

В приложении к задачам виброзащиты можно массоинерционный элемент *m* рассматривать как объект защиты. В этом случае в структуре виброзащитной системы образуется некоторое устройство для преобразования движения, имеющее вид рычага второго рода [4]. Такой рычаг обладает массоинерционными свойствами (имеет момент инерции *J* относительно точки O (рис. 1).

В данном случае исходная система (рис. 1) может быть рассмотрена как система с одной степенью свободы. При этом, как показано на рис. 4 а, б, в системе появляется дополнительный элемент, который отличается от известных типовых элементов (в данном случае пружин с жесткостями k, k_1, k_2).

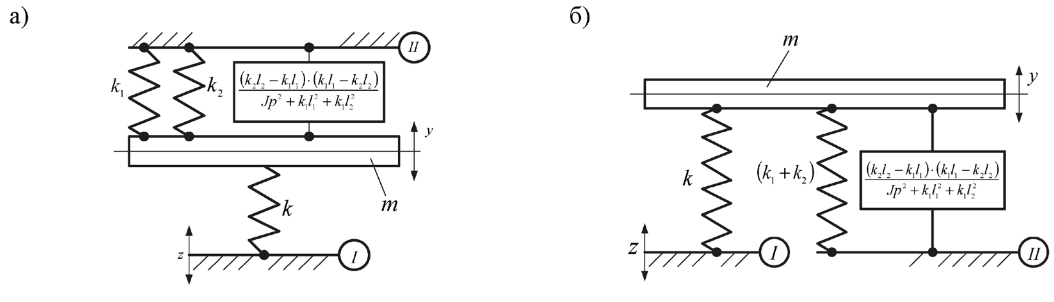

Рис. 4. Расчетная схема комбинированной системы, приведенная к системе, совершающей поступательное движение по координате y: а – опорные поверхности разнесены по вертикали; б – опорные поверхности I и II разделены: возмущение z – по опорной поверхности I

Расчетная схема на рис. 4а, б предполагает использование опорных поверхностей I и II. Вводимое в схему на рис. 4 устройство для преобразования движения характеризуется приведенной динамической жесткостью, которая записана с использованием комплексной переменной p ($p = j\omega$ [6]). При $p = 0$, то есть при отсутствии динамического возмущения со стороны основания ($z = 0$) динамическая жесткость устройства для преобразования движения трансформируется в жесткость сложной пружины, имеющей в своем составе рычаг второго рода.

Из анализа расчетной схемы на рис. 4а, б следует также, что исходная система (рис. 1) преобразуется в эквивалентную в динамическом отношении систему, но с другим набором составных элементов. Координата φ исключается, но взаимодействия, привносимые вращательным движением по координате φ, остаются и отражаются квазипружиной (или компактом), имеющей приведенную жесткость:

$$k_{np} = \frac{(k_2l_2 - k_1l_1)\cdot(k_1l_1 - k_2l_2)}{Jp^2 + k_1l_1^2 + k_1l_2^2}. \qquad (9)$$

Квзипружина обладает тем свойством, что при определенных соотношениях параметров приведенная жесткость может стать отрицательной. В физическом смысле это означает изменение направления упругой силы, развиваемой квазипружиной. Такой же эффект может быть получен при изменении частоты внешнего воздействия, так как знаменатель (9) определяется выражением:

$$A_0' = -J\omega^2 + k_1l_1^2 + k_2l_2^2, \qquad (9')$$

которое при увеличении p ($p = j\omega$) также приобретает отрицательное значение.

Отметим, что в структурных преобразованиях квазипружина ведет себя как обыкновенный упругий элемент. Ряд вопросов, связанных с упомянутыми особенностями свойств рассмотрен в работах [14, 15].

II. Особенности преобразования систем. Из расчетной схемы на рис. 4 можно определить ряд характеристик.

Если между парциальными системами исходной системы на рис. 1 связность определяется звеном с передаточной функцией $W'(p) = k_1l_1 - k_2l_2$, то связь между парциальными системами в координатах y, φ становится нулевой при выполнении условия $k_1l_1 = k_2l_2$. В этом случае при внешнем возмущении z система будет совершать движение как объект массой m, имея одну степень свободы. Парциальная частота системы совпадает с частотой собственных колебаний приведенной системы:

$$\omega_1^2 = \frac{k + k_1 + k_2}{m}. \qquad (10)$$

При этом величина момента инерции твердого тела J не имеет значения.

II. 1. Если <<elisl20.wmf>>, то интерес представляет случай, когда $J = 0$. В этом случае приведенная жесткость системы, формируемая с участием парциальной системы вращательного типа определится:

$$k_{np} = k + k_1 + k_2 - \frac{(k_2l_2 - k_1l_1)^2}{k_1l_1^2 + k_2l_2^2}. \qquad (11)$$

или

$$k_{np} = \frac{k\cdot(k_1l_1^2 + k_2l_2^2) + k_1k_2\cdot(l_1 + l_2)^2}{k_1l_1^2 + k_2l_2^2}. \qquad (11')$$

При $J = 0$ в системе возможно появление рычажного механизма второго рода, который не только формирует для объекта массой m приведенную жесткость, но и создает вполне определенную структуру связей в пространстве (в геометрическом смысле). Приведенная схема системы (рис. 4) в этом случае может интерпретироваться в соответствии с рис. 5, где

$$k_{np}' = \frac{k_1k_2\cdot(l_1 + l_2)^2}{k_1l_1^2 + k_2l_2^2}. \qquad (12)$$

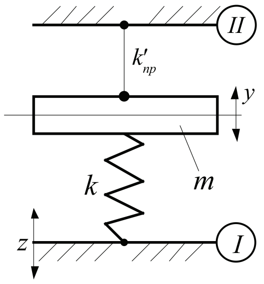

Рис. 5. Приведенная исходная расчетная схема при J = 0

Используем понятие передаточного отношения рычага:

$$i = \frac{l_2}{l_1}.$$

Знак передаточного отношения, то есть особенности рычажного механизма учтены при выводе уравнений движения (в общем случае передаточное отношение рычага второго рода имеет знак минус):

$$k'_{пр} = \frac{k_1 k_2 \cdot (1+i)^2}{k_1 + k_2 i^2}. \quad (13)$$

Если $i = 0$, то $k'_{пр} = k_2$. При $i = \infty$ $k'_{пр} = k_1$, что совпадает с физическими представлениями о свойствах механической системы с рычажными связями.

II. 2. Рычаг второго рода с неподвижной точкой вращения (т. О) создает пространственную структуру расположения элементов механической колебательной системы. Если рычаг имеет нулевые массоинерционные характеристики, то дополнительно к основной пружине с жесткостью k он создает параллельную упругую связь, определяемую выражением (13).

Эта связь представляет собой упругое соединение объекта с массой m с опорной поверхностью II. В этом случае частота собственных колебаний определится как в системе с одной степенью свободы:

$$\omega^2 = \frac{k_2 + k'_{пр}}{m}. \quad (14)$$

$$\omega^2 = \frac{k_1 k_2 \cdot (1+i)^2 + k_2 \cdot \left(k_1 + k_2 i^2\right)}{\left(k_1 + k_2 i^2\right) \cdot m}. \quad (14')$$

Отметим, что передаточное отношение i может выступать в качестве настроечного параметра при решении различных задач, связанных с оценкой и контролем динамического состояния механических колебательных систем, в частности, виброзащитных [6, 8].

II. 3. Если $J \neq 0$, то есть вращательное звено обладает достаточно значимым моментом инерции, то приведенная жесткость квазипружины в отличие от выражения (13), будет зависеть от p. В этом случае приведенная жесткость квазипружины может быть названа динамической:

$$k''_{пр} = \frac{(k + k_1 + k_2) \cdot \left(Jp^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2\right) - (k_1 l_1 - k_2 l_2)^2}{Jp^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}, \quad (15)$$

$$k''_{пр} = \frac{Jp^2 \cdot (k + k_1 + k_2) + k \cdot \left(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 + k_1 + k_2\right) \cdot \left(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 - (k_1 l_1 - k_2 l_2)^2\right)}{Jp^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}. \quad (15')$$

Выражение (15′) дает представление о сложном характере связей, формирующихся при массивном рычаге в структуре объекта виброзащитной системы в том случае, когда объект совершает поступательное (прямолинейное) движение. Выражение (15′) можно также представить в виде:

$$k_{пр} = k + k_1 + k_2 - \frac{(k_2 l_2 - k_1 l_1)^2}{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}. \quad (16)$$

II. 4. С учетом $J \neq 0$ исходная система становится системой с двумя степенями свободы, в которой парциальные системы имеют различные движения; одна система (координата y) реализует поступательный вид движения, другая (с координатой φ) – вращательное движение. Парциальные частоты системы могут быть определены из характеристического частотного уравнения:

$$Jmp^4 + p^2 \cdot \begin{bmatrix} J \cdot (k + k_1 + k_2) + m \cdot \left(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2\right) + \\ + (k + k_1 + k_2) \cdot \left(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2\right) \end{bmatrix} - (k_1 l_1 - k_2 l_2)^2 = 0. \quad (17)$$

Частоты собственных колебаний в данном случае могут быть определены в виде:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{J\cdot\left(k+k_1+k_2\right)+m\cdot\left(k_1l_1^2+k_2l_2^2\right)}{2Jm} \pm$$
$$\pm\sqrt{\frac{\left[J\cdot\left(k+k_1+k_2\right)-m\cdot\left(k_1l_1^2+k_2l_2^2\right)\right]^2+4Jm\cdot\left(k_1l_1-k_2l_2\right)^2}{4\left(Jm\right)^2}}. \quad (18)$$

Запишем, что парциальные частоты определяются:

$$n_1^2 = \frac{k+k_1+k_2}{m}. \quad (19)$$

$$n_2^2 = \frac{k_1l_1^2+k_2l_2^2}{J}. \quad (20)$$

В свою очередь:

$$\omega_1^2 = \frac{n_1^2+n_2^2}{2} - D; \quad (21)$$

$$\omega_2^2 = \frac{n_1^2+n_2^2}{2} + D. \quad (22)$$

где $D = \frac{1}{2Jm}\sqrt{\left[J\cdot\left(k+k_1+k_2\right)-m\cdot\left(k_1l_1^2+k_2l_2^2\right)\right]^2+4Jm\cdot\left(k_1l_1-k_2l_2\right)^2}$. (23)

Таким образом, механическая колебательная система (рис. 1), имеющая две парциальные системы, состояние которых определяется координатами y и φ, может быть преобразована и приведена к более простой системе, характеризуемой координатой поступательного движения y. При этом «упрощении» в структуре системы становится необходимым введение элемента нового типа – он может быть назван квазипружиной и иметь соответствующую приведенную жесткость. В общем случае приведенная жесткость зависит от частоты внешнего воздействия и может быть названа динамической.

В работах [12 ÷ 18] квазипружина упомянутого вида получила название обобщенной пружины. Оба названия отражают одну и ту же физическую сущность, но их понятийные поля могут быть в различных контекстах использоваться по-разному. Важным обстоятельством является то, что при $J = 0$ в системе с одной степенью свободы становится возможным обосновать появление рычажных связей. Они реализуются в данном случае рычажным механизмом второго рода. Такие связи в механических колебательных системах привносят новые свойства.

III. Исключение координаты *y*. Используем структурную схему на рис. 2 и систему уравнений движения:

$$mp^2\bar{y}+\bar{y}\cdot\left(k+k_1+k_2\right)+\bar{\varphi}\cdot\left(k_2l_2-k_1l_1\right)=k\bar{z}; \quad (24)$$

$$Jp^2\bar{\varphi}+\bar{\varphi}\cdot\left(k_1l_1^2+k_2l_2^2\right)+\bar{y}\cdot\left(k_2l_2-k_1l_1\right)=0. \quad (25)$$

Из (24) следует, что:

$$\bar{y} = \frac{k\bar{z}+\bar{\varphi}\cdot\left(k_2l_2-k_1l_1\right)}{mp^2+k+k_1+k_2}. \quad (26)$$

После подстановки (26) в (25) получим:

$$\bar{\varphi}\cdot\left(Jp^2+k_1l_1^2+k_2l_2^2\right)-\bar{\varphi}\cdot\frac{\left(k_1l_1-k_2l_2\right)^2}{mp^2+k+k_1+k_2}=\frac{k\cdot\left(k_1l_1-k_2l_2\right)}{mp^2+k+k_1+k_2}\cdot\bar{z}. \quad (27)$$

На рис. 6б приведена структурная схема исходной системы (рис. 1) при исключении координаты $\bar{y}$. На рис. 6а приведена соответствующая расчетная схема в символической форме как механической системе с одной степенью свободы, определяемой координатой $\bar{\varphi}$.

Если рассмотреть расчетную схему парциальной системы с соответствующим вращательным движением, то она принимает вид, как показано на рис. 7.

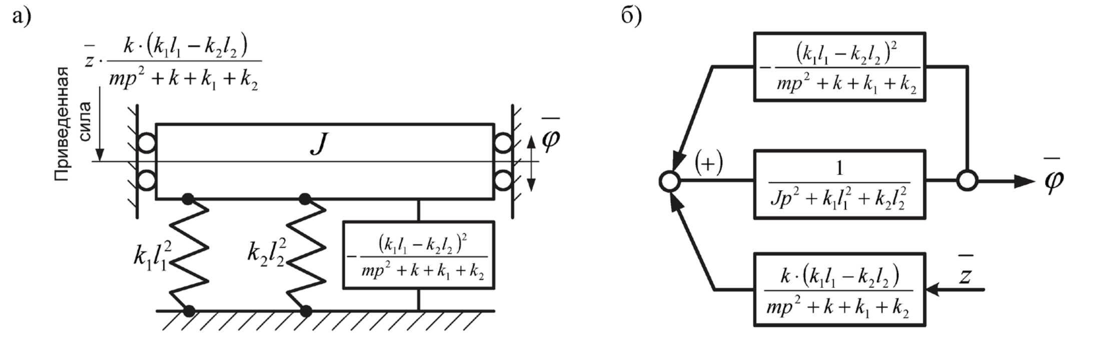

Рис. 6. Структурная (а) и расчетная (б) схемы при исключении координаты у

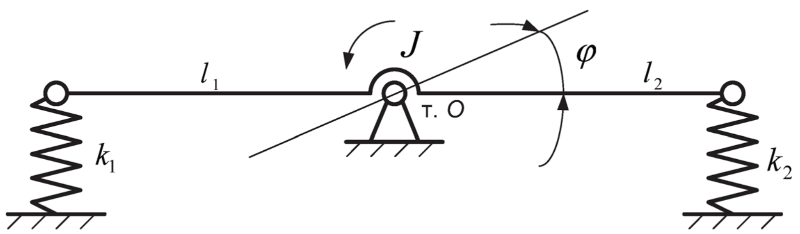

Рис. 7. Расчетная схема парциальной системы вращательного движения

Используя схему на рис.7, можно найти парциальную частоту:

$$n_2^2 = \frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{J}. \quad (28)$$

Это будут угловые колебания. Возвращаясь к расчетной схеме на рис. 6а, найдем, что приведенная жесткость квазипружины определяется формулой:

$$k''_{пр} = \frac{l_1^2 \cdot (k_1 - k_2 \cdot i)^2}{mp^2 + k + k_1 + k_2}. \quad (29)$$

Выражение (29) соответствует крутильной динамической жесткости во вращательном движении с координатой φ.

Если исходную систему (рис. 1) привести к системе с одной степенью свободы (что можно сделать при исключении координаты y), то выражение (29) можно представить в детализированном, полагая, что:

$$\left(k_2 l_2 - k_1 l_1\right)^2 = \left(k_2 l_2\right)^2 - 2k_1 k_2 l_1 l_2 + \left(k_1 l_1\right)^2. \quad (29')$$

Для того чтобы войти в формат расчетной схемы, отражающей особенности движения твердого тела относительно точки О, вернемся к уравнению (27). Сделаем ряд преобразований над (27):

$$Jp^2 \cdot \bar{\varphi} + \frac{A_1 k_1 l_1^2 + A_1 k_2 l_2^2 - k_1^2 l_1^2 + 2k_1 k_2 l_1 l_2 - k_2 l_2^2}{A_1} = \frac{k \cdot \left(k_1 l_1 - k_2 l_2\right)}{A_1} \cdot \bar{z} \quad (27')$$

Тогда (27′) можно записать следующим образом:

$$Jp^2 + \frac{k_1 l_1^2 \cdot \left(mp^2 + k + k_2\right)}{A_1} + \frac{k_2 l_2^2 \cdot \left(mp^2 + k + k_1\right)}{A_1} + \frac{k_1 k_2 l_1^2 i}{A_1} + \frac{k_1 k_2 l_2^2}{i \cdot A_1} = \frac{k \cdot \left(k_1 l_1 - k_2 l_2\right)^2}{A_1}. \quad (27)$$

В этом случае расчетная схема (рис. 1) при исключении переменной $\bar{y}$ примет вид как показано на рис. 8.

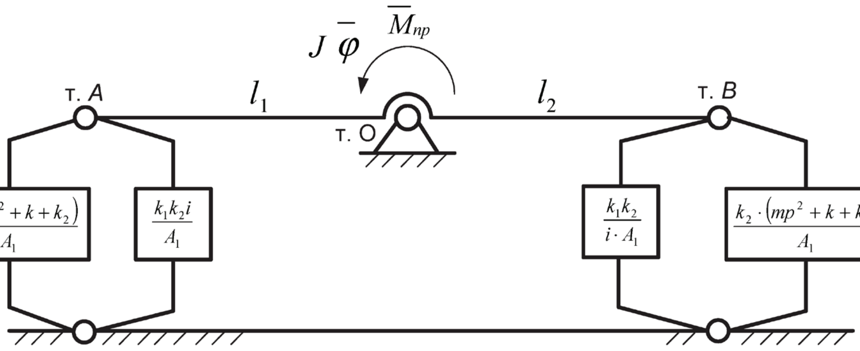

Рис. 8. Расчетная схема эквивалентной системы с одной степенью свободы с объектом, состояние которого описывается координатой φ ($A_1 = mp^2 + k + k_1 + k_2$)

Отметим, что на рис. 8 принятые обозначения тт. *A* и *B* локализуют условия присоединения типовых элементов и квазипружин к объекту, совершающему вращательно-колебательное движение по координате φ. Приведенный момент сил, прикладываемый к объекту с моментом инерции *J* , формируется кинематическим возмущением *z*:

$$\overline{M}_{пр} = \frac{k\cdot(k_1 l_1 - k_2 l_2)}{mp^2 + k + k_1 + k_2}\cdot \bar{z}. \qquad (30)$$

Что касается элементов структуры на рис.8 с использованием A_l , то они являются квазипружинами, жесткости которых во вращательном движении составляют:

$$k_{пр1} = -\frac{k_1^2 l_1}{mp^2 + k + k_1 + k_2}; \qquad (31)$$

$$k_{пр2} = -\frac{k_2^2 l_2}{A_1}; \qquad (32)$$

$$k_{пр3} = \frac{k_1 k_2 l_1}{A_1}; \qquad (33)$$

$$k_{пр4} = \frac{k_1 k_2 l_2}{A_1}. \qquad (34)$$

Таким образом, комбинированная система (рис. 1) приводится к рычажному механизму, в котором рычаг обладает моментом инерции *J*. При этом кинематическое возмущение $\bar{z}$ преобразуется к приведенному моменту сил (рис. 8).

Если принять, что *m* = 0, то:

$$k_{пр1} = -\frac{k_1^2 l_1}{k + k_1 + k_2};\ k_{пр2} = -\frac{k_2^2 l_2}{k + k_1 + k_2};\ k_{пр3} = \frac{k_1 k_2 l_1}{k + k_1 + k_2};\ k_{пр4} = \frac{k_1 k_2 l_2}{k + k_1 + k_2}, \qquad (35)$$

что позволяет привести упругие элементы к точкам *A* и *B*, что дает следующие результаты:

$$k_{пр_A} = \frac{kk_1 + k_1k_2\cdot(1+i)}{k + k_1 + k_2}; \qquad (36)$$

$$k_{пр_B} = \frac{kk_2 i + k_1k_2\cdot(1+i)}{k + k_1 + k_2}. \qquad (37)$$

Таким образом, рассмотрение особенностей формирования рычажных связей показывает, что динамические свойства механических колебательных систем существенно зависит от особенностей парциальных систем, составляющих основу системы. Если парциальные системы неоднородны, то есть могут совершать и поступательные и вращательные движения, то большое значение приобретают рычажные связи. Можно предположить, что рычажные связи в колебательных системах могут принимать различные формы, что зависит от выбора обобщенных координат.

IV. Свойства системы с рычажными связями первого рода. Расчетная схема с двумя степенями свободы состоит из двух твердых тел и упругих связей. Твердое тело может двигаться поступательно, а второе – вращаться вокруг неподвижной точки, как показано на рис.9.

Система опирается на основание, закон движения которого известен ($z(t)$ – гармоническое колебание).

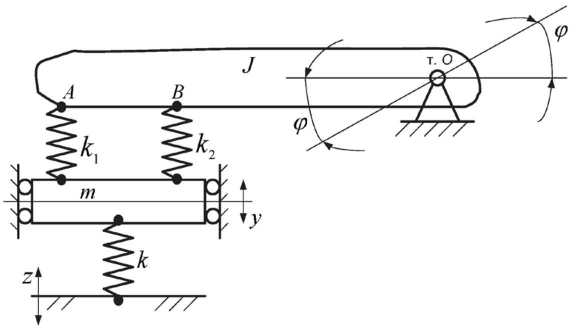

Рис.9. Расчетная схема системы с двумя твердыми телами, совершающими вращательно-качательное (φ) и поступательное (y) движения

Твердые тела совершают малые движения. Принимается, что $OA = l_1$, $OB = l_2$; $i = \frac{l_2}{l_1}$ – передаточное отношение рычажных связей.

Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{y}\right)^2 + \frac{1}{2}J\left(\dot{\varphi}\right)^2; \qquad (38)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k\cdot\left(y-z\right)^2 + \frac{1}{2}k_1\cdot\left(\varphi\cdot l_1 - y\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\cdot\left(\varphi\cdot l_2 - y\right)^2. \qquad (39)$$

Уравнения движения в координатах y и φ имеют вид:

$$m\ddot{y} + y\cdot\left(k+k_1+k_2\right) - \varphi\cdot\left(k_1 l_1 + k_2 l_2\right) = kz; \qquad (40)$$

$$J\ddot{\varphi} + \varphi\cdot\left(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2\right) - y\cdot\left(k_1 l_1 + k_2 l_2\right) = 0. \qquad (41)$$

Из (41) найдем, что:

$$\bar{\varphi} = \frac{\left(k_1 l_1 + k_2 l_2\right)\cdot\bar{y}}{Jp^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}. \qquad (42)$$

Подставив (42) в (40), получим (в изображениях по Лапласу) при исключении координаты φ:

$$\bar{y}\cdot\left(mp^2 + k + k_1 + k_2 - \frac{\left(k_1 l_1 + k_2 l_2\right)^2}{Jp^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}\right) = k\bar{z}. \qquad (43)$$

Структурная схема системы (рис. 9) с её формами преобразования приведена на рис.10а, б. При этом, схема на рис.10а соответствует двум степеням свободы движения, а на рис.10б – схема преобразована и координата φ исключена. Внешнее воздействие представляет собой движение основания пружины с жесткостью k, определяемое через z. Также, как и в исходной системе на рис.1, можно выделить появление квазипружины с приведенной жесткостью:

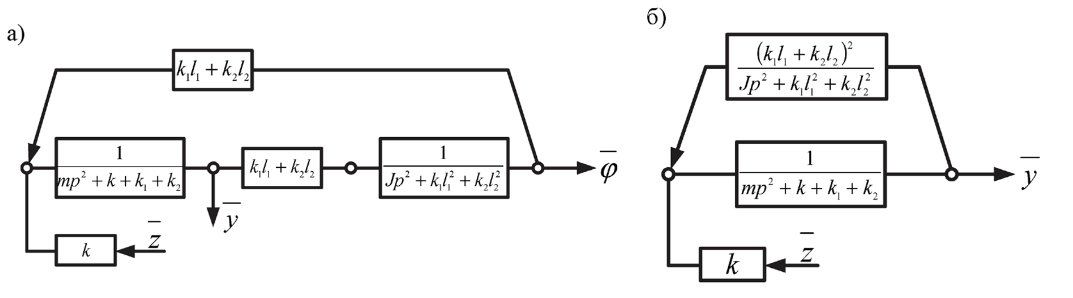

Рис. 10. Структурная схема (а), соответствующая системе на рис.8; б – структурная схема с исключением координаты φ

$$k''_{пр} = \frac{\left(k_1 l_1 + k_2 l_2\right)^2}{Jp^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}. \qquad (44)$$

Выражение (44) отличается от аналогичного выражения (9) тем, что в числителе стоит $\left(k_1 l_1 + k_2 l_2\right)$, а не $\left(k_1 l_1 - k_2 l_2\right)$, что соответствует изменению вида рычажной связи.

Преобразуем (44), вводя передаточное отношение $i = \frac{l_2}{l_1}$ и получим, что:

$$k_{пр} = \frac{\left(k_1 + k_2 i\right)^2}{\frac{J}{l_1^2} p^2 + k_1 + k_2 i^2}. \qquad (45)$$

На рис. 11 приведена расчетная схема в виде системы с одной степенью свободы и объектом защиты m (координата $\bar{y}$).

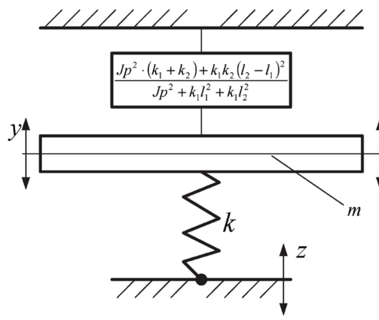

Рис. 11. Расчетная схема системы с рычажной связью первого рода

Если принять, что $J = 0$, то:

$$k''_{пр} = \frac{k_1 k_2 \cdot \left(l_2 - l_1\right)^2}{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2} = \frac{k_1 k_2 \cdot \left(i - 1\right)^2}{k_1 + k_2 i^2}. \qquad (46)$$

Если взять за основу расчетную схему на рис.4а, но использовать рычажную связь первого рода, то расчетная схема примет вид, как показано на рис. 12.

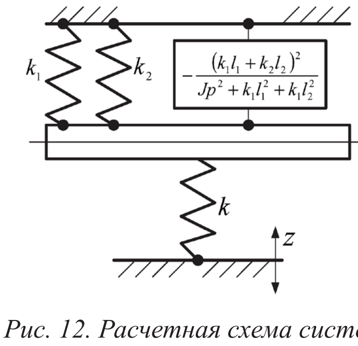

Рис. 12. Расчетная схема системы с рычажным звеном первого рода

Введение рычажных связей (через твердое тело с моментом инерции J) другого типа изменяет значения приведенных жесткостей квазипружин. В связи с этим будут изменяться и свойства механической колебательной системы в целом. Что касается рассматриваемого на рис. 12 случая, то в нем предполагается постановка задачи вибрационной защиты с объектом в виде массоинерционного элемента структуры (m), тогда как рычажная связь используется для настроечных целей.

Заключение

Приведенные материалы свидетельствуют о том, что между вращательными и поступательными движениями при реализации структурных подходов выявляется адекватность представлений о правилах преобразований. Главное заключается в том, что рычажные связи появляются в результате абстрагирования от некоторых особенностей вращательного движения. Оно характеризуется тем, что связи между типовыми элементами в системе разнесены в пространстве, что делает обоснованным введение и рычажных связей и рычажных механизмов.

Показано, что разделение рычажных связей вполне объяснимо, если принять во внимание характер локализации мест закрепления связей относительно неподвижной точки рычага. Если связи многочисленные и располагаются с разных сторон точки вращения рычага. То структура передаточных отношений должна корректироваться в связи с выбором точек крепления элементов по отношению к точке вращения рычага.

В данной работе парциальные системы выбраны таким образом, что вращательное движение и поступательное физически разделены и в качестве межпарциальных связей выступают упругие элементы k_1 и k_2. Однако существуют системы, в которых твердое тело объединяет отдельные виды движений в одно (это плоское движение). В этом случае парциальные связи будут носить другой характер (часто их называют инерционными [6, 9]). Такие системы также могут быть приведены к эквивалентному виду цепной системы, что, в частности, рассматривалось в работах [16 ÷ 18].

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и педагогические кадры инновационной России (2012-2013)» по теме «Мехатроника виброзащитных колебательных систем» (№ 14.132. 21. 1362).

Список литературы

1. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. – М.: Изд-во Московского университета. – 1974. – 569 с.

2. Зоммерфельд А. Механика. – М.: Госуд. изд-во иностр. лит-ры. – 1947. – 392 с.

3. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука. – 1992. – 455 с.

4. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. – М.: Наука. – 1972. – 360 с.

5. Люиселл У. Связанные и параметрические колебания в электронике. – М.: ИЛ. – 1963. – 520 с.

6. Елисеев С.В., Резник Ю.И., Хоменко А.П. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем. – Новосибирск: Наука, 2011. – 394 с.

7. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Системный анализ и математическое моделирование в мехатронике виброзащитных систем. – Иркутск: ИрГУПС. 2012. – 288 с.

8. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б. Прикладные задачи структурной теории виброзащитных систем. – СПб: Политехника. 2013. – 374 с.

9. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Ситов И.С. Динамика механических систем. Рычажные и инерционно-упругие связи. – СПб.: Политехника, 2013. – 319 с.: ил.

10. Wiercigroch M. 2000. Modeling of dynamical systems with motion dependent discontinuities. Chaos, solitous and Fractals, 11, 2429-2442.

11. Махутов Н.А., Петров В.П., Куксова В.И., Москвитин Г.В. Современные тенденции развития научных исследований по проблемам машиноведения и машиностроения / Проблемы машиностроения и автоматизации. 2008. №3. С. 3-19.

12. Елисеев С.В., Ковыршин С.В., Большаков Р.С. Особенности построения компактов упругих элементов в механических колебательных системах. Взаимодействия с элементами систем и формы соединения / Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – Иркутск: ИрГУПС, 2012. – №4(36). – С. 61-70.

13. Елисеев С.В., Артюнин А.И., Большаков Р.С. Некоторые вопросы динамики взаимодействия в механических колебательных системах с рычажными связями / Машиностроение и безопасность жизнедеятельности. – 2012. – №4(14). – С. 36-45.

14. Упругие элементы в механических системах. Структурные интерпретации / Хоменко А.П., Елисеев С.В., Артюнин А.И., Елисеев А.В., Большаков Р.С., Каимов Е.В.; Ирк. гос. ун-т путей сообщ. – Иркутск, 2013. – 460 с. – Библиогр.: 200 назв. – Рус. – Деп. в ВИНИТИ 02.08.13 № 230 – В 2013.

15. Механизмы в упругих колебательных системах: особенности учета динамических свойств, задачи вибрационной защиты машин, приборов и оборудования / Хоменко А.П., Елисеев С.В., Артюнин А.И., Паршута Е.А, Каимов Е.В.; Ирк. гос. ун-т путей сообщ. – Иркутск, 2013. – 187 с. ил. – Библиогр.: 66 назв. – Рус. – Деп. в ВИНИТИ 15.08.2013 № 243 – В 2013.

16. Динамические взаимодействия элементов машин: расчетные схемы и математические модели вибрационных состояний / Елисеев С.В., Артюнин А.И., Логунов А.С., Насников Д.Н., Большаков Р.С. Каимов Е.В., Миронов А.С., Паршута Е.А.; Ирк. гос. ун-т путей сообщ. – Иркутск , 2013. – 319 с . – Библиогр.: 178 назв. – Рус. – Деп в ВИНИТИ 08.11.13 № 313 – В 2013.

17. Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В., Большаков Р.С. Рычажные связи в динамических взаимодействиях механических колебательных систем с двумя степенями свободы / Известия Юго-Западного государственного университета. – 2012. – №1-2. – С.6-12.

18. Елисеев С.В., Большаков Р.С. Рычажные связи в структурных интерпретациях механических колебательных систем / В книге «Транспорт-2013». Труды международной научно-практической конференции. – Ростов-на-Дону, 2013. – Ч. III – С. 247-250.