

УДК 62-752

## КОНСТРУКТИВНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЫЧАЖНЫХ СВЯЗЕЙ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ПОДВЕСОК ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

**Елисеев С.В., Трофимов А.Н., Каимов Е.В.**

*ФГБОУ ВПО «Иркутский государственный университет путей сообщения», Иркутск,  
e-mail: eliseev\_s@inbox.ru*

Предлагается методологическая основа построения математических моделей расчетных схем подвесок для транспортных средств. Особенность подхода заключается в использовании рычажных механизмов, которые создают структуры, обеспечивающие возможности реализации режимов динамического гашения колебаний. Объект защиты от вибраций, поступающих со стороны опорной поверхности, имеет два Т-образных рычажных сектора. Рассматриваются динамические свойства системы, имеющей три и две степени свободы движений. Разработан метод построения структурных аналогов дифференциальных уравнений. Для оценки динамических свойств используются передаточные функции систем. Показаны возможности учета особенностей, привносимых введением в структуру системы рычажных механизмов и устройств для преобразования движения (УПД). Показаны возможности упрощения систем путем введения дополнительных связей, возникающих при использовании зубчатого зацепления в динамике относительного движения элементов системы.

**Ключевые слова:** модели транспортных подвесок, рычажные связи и механизмы, устройства для преобразования движения, виброзащита и виброизоляция

## CONSTRUCTIVE-TECHNICAL FORMS OF USING OF LEVER TIES IN TASKS OF DYNAMICS OF HANGERS OF TRANSPORT MEANS

**Eliseev S.V., Trofimov A.N., Kaimov E.V.**

*FSBEO HPE «Irkutsk State Transport University», Irkutsk, e-mail: eliseev\_s@inbox.ru*

The methodological basis of creation of mathematical models of settlement schemes of suspenders for vehicles is offered. Feature of approach consists in use of lever mechanisms which create the structures providing possibilities of realization of modes of dynamic blanking out of oscillations. The object of protection against the vibrations arriving from a seating, has two T-shaped lever sectors. Dynamic properties of the system, having three and two degrees of freedom of movements are considered. The method of creation of structural analogies of the differential equations is developed. For an assessment of dynamic properties transfer functions of systems are used. Possibilities of the accounting of the features introduced by introduction in structure of system of lever mechanisms and devices for transformation of movement are shown. Possibilities of simplification of systems by introduction of the additional ties arising at use of toothed gearing in dynamics of relative movement of elements of system are shown.

**Keywords:** models of transport suspenders, lever ties and mechanisms, devices for movement transformation, vibroprotection and vibration insulation

Внимание к задачам динамики транспортных средств инициируется развитием мобильной робототехники и использованием управляемых виброзащитных систем [1 ÷ 4]. Ряд вопросов, связанных с особенностями построения математических моделей колебательных систем, рассмотрен в монографиях [5, 6], что предопределило интерес к развитию методологического базиса теории и практики виброзащиты, а также – к поиску новых способов и средств оценки изменения и управления динамическим состоянием систем, содержащих не только упругие и диссипативные элементы, но и устройства для преобразования движения, в том числе и рычажные механизмы различных видов [5, 7 ÷ 9]. Вместе с тем, введение рычажных механизмов в структуры колебательных систем связано с необходимостью учета многочисленных осо-

бенностей, которые возникают при выборе места расположения точек опоры рычагов, их конфигурации и форм использования соединительных элементов.

В предлагаемой статье рассматриваются возможности построения математических моделей подвесок мобильных робототехнических систем, в составе которых используются сложные рычажные связи, а также особенности возникающих режимов и условий формирования динамического состояния.

### **I. Общие положения. Постановка задачи**

Рассматривается система, которая имеет объект защиты массой  $m_0$ , совершающий вертикальные движения ( $y_0$ ) относительно положения статического равновесия: в тт.  $A$  и  $B$  объекту защиты прикрепляются два рычажных механизма обратной Т-образной формы.

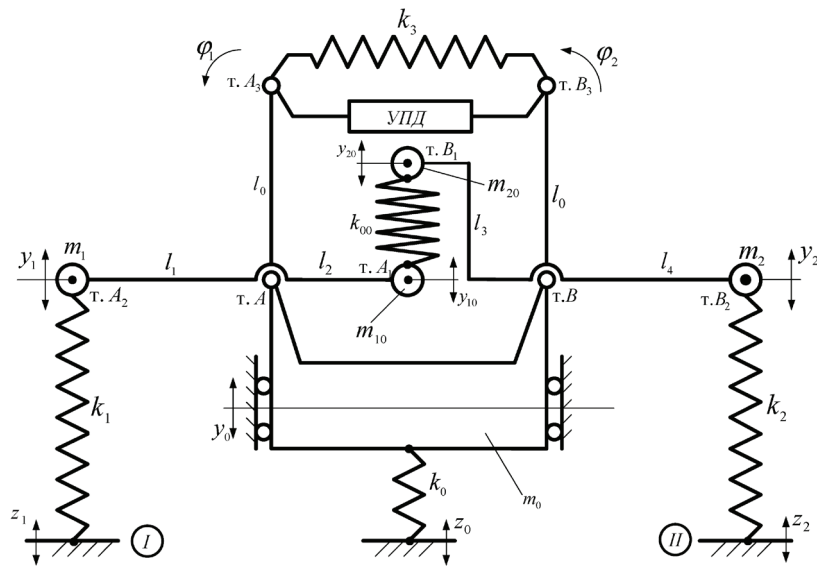


Рис. 1. Расчетная схема блока подвески робототехнического устройства

Каждый из рычажных механизмов имеет массоинерционные элементы, закрепленные соответственно в тт.  $A_2, A_1 (m_1, m_{10})$  и тт.  $B_2, B_1 (m_2, m_{20})$ . В тт.  $A_3, B_3$  закреплены элементы системы: пружина жесткостью  $k_3$  и устройство для преобразования движения (УПД) в виде винтового несамотормозящегося механизма [10]. Кроме того, точки  $A_1$  и  $B_1$  связаны упругим элементом жесткостью  $k_{00}$ . В свою очередь, объект также опирается на пружину жесткостью  $k_0$ .

Массоинерционные элементы  $m_1$  и  $m_2$  опираются на опорные поверхности  $I$  и  $II$ , закон движения которых известен  $(z_1, z_2)$ . Кроме того, элемент  $k_0$  опирается на опорную поверхность с законом движения  $z_0(t)$ . Предполагается, что система совершает малые колебания без учета сил сопротивления. Для описания движения используются системы координат  $y_0, \varphi_1, \varphi_2$  и  $y_1, y_2$ . Все необходимые геометрические параметры показаны на рис. 1.

Кинематические возмущения на стадии предварительного изучения считаются гармоническими. Вопросы взаимоотношения параметров движения  $z_0, z_1, z_2$  рассматриваются отдельно.

Цель исследования заключается в оценке динамических свойств системы, возникающих при действии гармонических сил, которые могут находиться между собой в определенных соотношениях.

В числе решаемых задач предполагается разработка математической модели системы и оценке возможностей изменения динамического состояния путем структурных трансформаций и выбора настроечных параметров.

### II. Построение математической модели системы

Используются структурные методы математического моделирования [6, 9 ÷ 11]. Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий в предположении, что система совершает малые колебания относительно положения статического равновесия:

$$T = \frac{1}{2} \cdot (m_0 + m_1 + m_2 + m_{10} + m_{20}) \cdot (\dot{y})^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)^2 + \frac{1}{2} \cdot (\dot{\varphi}_1)^2 \cdot (m_1 l_1^2 + m_{10} l_2^2) + \frac{1}{2} \cdot (\dot{\varphi}_2)^2 \cdot (m_2 l_4^2 + m_{20} l_3^2), \quad (1)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – углы поворота рычажных устройств относительно объекта  $m_0$ ;  $L$  – приведенная массоинерционная характеристика УПД [10];

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2}k_0 \cdot (y_0 - z_0)^2 + \frac{1}{2}k_1 \cdot (y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2 \cdot (y_2 - z_2)^2 + \\ & + \frac{1}{2}k_3 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)^2 l^2 + \frac{1}{2}k_{00} \cdot (\varphi_2 l_3 - \varphi_1 l_2)^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Для определения производных от потенциальной энергии введем ряд соотношений:

$$\left. \begin{aligned} y_{10} &= \varphi_1 \cdot l_2, & y_{20} &= \varphi_2 \cdot l_3 \\ y_1 &= y_0 + \varphi_1 \cdot l_1, & y_2 &= y_0 + \varphi_2 \cdot l_4 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

С учетом соотношений (3) потенциальная энергия запишется:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2}k_0 \cdot (y_0 - z_0)^2 + \frac{1}{2}k_1 \cdot (y_1 - \varphi_1 l_2 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2 \cdot (y_2 - \varphi_2 l_4 - z_2)^2 + \\ & + \frac{1}{2}k_3 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)^2 l^2 + \frac{1}{2}k_{00} \cdot (\varphi_2 l_3 - \varphi_1 l_2)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y_0} = k_0 y_0 - k_0 z_0 + k_1 y_0 - k_1 \cdot (\varphi_1 l_2 + z_1) + k_2 y_0 - k_2 \cdot (\varphi_2 l_4 + z_2).$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = k_1 l_2^2 \cdot \varphi_1 - k_1 l_2^2 y_0 + z_1 l_2 k_1 - k_1 \cdot (\varphi_1 l_2 + z_1) + k_2 y_0 - k_2 \cdot \varphi_1 (\varphi_2 l_4 + z_2).$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = k_2 l_4^2 \cdot \varphi_2 - k_2 l_4 y_0 + z_2 l_4 k_2 + k_3 l^2 \cdot \varphi_2 - k_3 l^2 \cdot \varphi_1 + k_{00} l_3^2 \cdot \varphi_2 - k_{00} l_2 l_3 \cdot \varphi_1.$$

Найдем уравнения движения:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 \cdot (m_0 + m_1 + m_2 + m_{10} + m_{20}) + y_0 \cdot (k_0 + k_1 + k_2) - \varphi_1 k_1 l_2 - \varphi_2 k_2 l_4 = \\ = k_0 z_0 + k_1 z_1 + k_2 z_2; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 \cdot (m_1 l_1^2 + m_{10} l_2^2 + L \cdot l^2) + \varphi_1 \cdot (k_1 l_2^2 + k_2 l^2 + k_{00} l_2^2) + \ddot{\varphi}_2 \cdot (-L l^2) + \\ + \varphi_2 \cdot (-k_3 l_2 - k_{00} l_2 l_3) - k_1 l_2^2 y_0 = -k_1 z_1 l_2; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_2 \cdot (m_2 l_4^2 + m_{20} l_3^2 + L \cdot l^2) + \varphi_2 \cdot (k_2 l_4^2 + k_3 l^2 + k_{00} l_3^2) + \ddot{\varphi}_1 \cdot (-L l^2) + \\ + \varphi_1 \cdot (-k_3 l^2 - k_{00} l_2 l_3) - k_2 l_4 y_0 = -k_2 z_2 l_4. \end{aligned} \quad (7)$$

На рис. 2 приведена структурная схема исходной системы (рис. 1) в координатах  $y_0$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ . Особенность системы заключается

в том, что между парциальными системами  $(\varphi_1)$  и  $(\varphi_2)$  связь имеет инерционно-упругий тип. При частоте внешнего воздействия:

$$\omega_{нар}^2 = \frac{k_{00} l_2 l_3 + k_3 l_2^2}{L l^2 p^2}, \quad (8)$$

возможно обнуление межпарциальных связей между  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (а также между  $y_1$  и  $y_2$ ). В остальных

случаях, то есть при рассмотрении  $y_0$  и  $\varphi_1$ , а также  $\varphi_2$  и  $y_0$ , связи являются упругими.

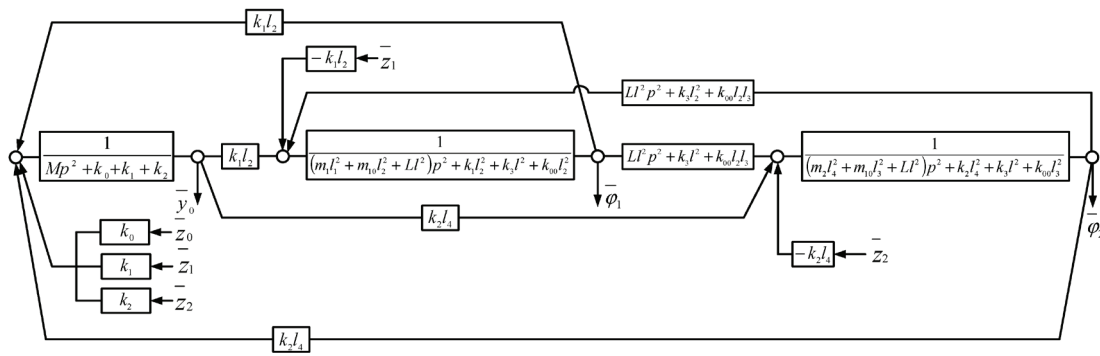


Рис. 2. Структурная схема системы с T-образными рычагами (рис. 1) в координатах  $\bar{y}_0, \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2$   
 В табл. 1 приведены коэффициенты уравнений движения (5)–(7) в координатах  $y_0, \varphi_1, \varphi_2$ .

Таблица 1

Коэффициенты уравнений (5) ÷ (7)

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$(m_0 + m_1 + m_2 + m_{10} + m_{20}) \cdot p^2 + k_0 + k_1 + k_2$	$-k_1 l_2^2$	$-k_2 l_4$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$-k_1 l_2^2$	$(m_1 l_1^2 + m_{10} l_2^2 + Ll^2) p^2 + k_1 l_2^2 + k_3 l^2 + k_{00} l_2^2$	$-(Ll^2) p^2 - k_3 l_2^2 - k_{00} l_2 l_3$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$
$-k_2 l_4$	$-(Ll^2) p^2 - k_3 l_2^2 - k_{00} l_2 l_3$	$(m_1 l_1^2 + m_{10} l_2^2 + Ll^2) p^2 + k_1 l_2^2 + k_3 l^2 + k_{00} l_2^2$
$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$
$k_0 \bar{z}_0 + k_1 \bar{z}_1 + k_2 \bar{z}_2$	$-k_1 \bar{z}_1 l_2$	$-k_2 \bar{z}_2 l_4$

Примечание. В таблице представлены результаты преобразования (5) ÷ (7) по Лапласу ( $p = j\omega$  – комплексная переменная [10, 11];  $Q_1 \div Q_3$  – обобщенная сила по координатам  $y_0, \varphi_1$  и  $\varphi_2$ ).

### III. Оценка динамических свойств системы

Для оценки динамических свойств системы могут быть использованы формулы Крамера [12].

$$\bar{y}_0 = \frac{1}{A_0} \left[ \bar{Q}_1 \cdot (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) + \bar{Q}_2 \cdot (a_{13} a_{32} - a_{12} a_{33}) + \bar{Q}_3 \cdot (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) \right], \quad (9)$$

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{1}{A_0} \left[ \bar{Q}_1 \cdot (a_{23} a_{31} - a_{21} a_{33}) + \bar{Q}_2 \cdot (a_{11} a_{33} - a_{13} a_{31}) + \bar{Q}_3 \cdot (a_{13} a_{21} - a_{11} a_{23}) \right], \quad (10)$$

$$\bar{\varphi}_2 = \frac{1}{A_0} \left[ \bar{Q}_1 \cdot (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) + \bar{Q}_2 \cdot (a_{12} a_{31} - a_{11} a_{32}) + \bar{Q}_3 \cdot (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \right], \quad (11)$$

где  $A_0$  – характеристическое уравнение системы, приведенной на рис. 2.

$$A_0 = a_{11}a_{22}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2 + 2a_{12}a_{23}a_{31}. \quad (12)$$

Используя формулы (10) ÷ (12), можно найти передаточные функции, определяющие взаимодействие между входными внешними возмущениями из набора  $\underline{z}_0, \underline{z}_1, \underline{z}_2$  и выходными сигналами  $\underline{y}_0, \Phi_1, \Phi_2$ . Если на входе в парциальную систему действует несколько сигналов, как, это следует, к примеру, из табл. 1 по отношению к объекту защиты  $m_0$ , то может быть использован принцип суперпозиции. Определенный интерес представляет рассмотрение ситуации, при которой между внешними сигналами  $z_0, z_1, z_2$  устанавливаются некоторые соотношения. Например,

можно предполагать, что система опирается одновременно на одну поверхность, тогда можно принять, что  $z = z_0 = z_1 = z_2$  – с соответствующими особенностями определения передаточных функций на основе выражений (10) ÷ (12).

Если  $k_0 = 0$ , то объект  $m_0$  непосредственно не связан с опорной поверхностью, контакт осуществляется через упругие элементы  $k_1$  и  $k_2$  (рис. 1). При  $z = z_1 = z_2$  можно получить передаточную функцию при входном сигнале (или обобщенном внешнем воздействии  $\underline{z}$ ) и выходном сигнале  $\underline{y}_0$ :

$$W_1(p) = \frac{\underline{y}_0}{z} = \frac{(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23})}{A_0}. \quad (13)$$

Так как  $a_{23}$  в соответствии со структурной схемой на рис.2 и табл. 1 имеет вид:

$$a_{23} = Ll^2 p^2 + k_3 l^2 + k_{00} l_2 l_3, \quad (14)$$

то числитель (13) при

$$a_{11} = (m_0 + m_1 + m_2 + m_{10} + m_{20}) \cdot p^2 + k_0 + k_1 + k_2 \quad (15)$$

представляет собой биквадратное уравнение относительно квадрата частоты внешнего воздействия. Если исключить контакт  $m_0$  с опорной поверхностью, приняв  $k_0 = 0$ , то в отношении объекта защиты можно ожидать появления двух режимов динамического гашения колебаний при действии вибраций со стороны основания ( $z = z_1 = z_2$ ). Ситуация, в принципе, не изменится, если будет выполняться условие  $z = z_0 = z_1 = z_2$  ( $k_0 \neq 0$ ). Однако при этом параметры (то есть частоты динамического гашения) изменятся. Амплитудно-частотные характеристики системы по переменной  $\underline{y}_0$  будут иметь обычный характер. Отметим, что при характеристическом уравнении  $A_0$  можно ожидать наличие трех резонансных частот с соответствующим увеличением амплитуд колебаний по координате  $y_0$ . В этом случае две частоты динамического гашения будут располагаться между тремя резонансными частотами. Схема подвески (рис. 1) обладает возможностями изменения динамического состояния объекта защиты  $m_0$  путем соответствующего выбора настроечных параметров. Такими параметрами могут стать длины звеньев рычагов, жесткости упругих элементов  $k_3$  и  $k_{00}$ , а также массоинерционные параметры УПД (имеются в виду  $L$  – приведенная масса УПД и  $l$  – длина плеча рыча-

га). Выше отмечалось, что при соблюдении соотношения (8) возможна развязка парциальных связей.

В подвесках с рычажными связями при наличии нескольких входных сигналов возможны проявления локальных зависимостей между внешними воздействиями. К примеру, соотношения  $z = z_0 = z_1 = z_2$  отражают возможность вертикальных колебаний одновременно всех опорных поверхностей одновременно. Однако, вполне возможными являются ситуации, когда движения по отдельным поверхностям ( $z_0, z_1, z_2$ ) рассматриваются как фрагменты некоторого общего движения. Таким движением может быть качание общей поверхности относительно некоторого центра и др. В спектральной теории подвески транспортных систем рассматриваются более сложные функциональные зависимости между действиями нескольких входных сигналов. В работах [13, 14] рассматриваются возможности линейных соотношений в параметрах одновременно действующих возмущений. Отметим также, что возникающая постановка задачи оценки динамического состояния системы при действии нескольких силовых факторов может считаться вполне «естественной» при действии внешней силы, смещенной относительно центра тяжести, при колебаниях, например,

твёрдого тела на упругих опорах, совершающего плоские колебания.

Использование настроечных параметров  $k_3$  и  $k_{00}$  в рассматриваемой схеме (рис. 1) обладает вполне определенными недостатками. В частности, при  $k_{00} \rightarrow \infty$  связь между элементами  $m_{10}$  и  $m_{20}$  блокируется, что одновременно приводит к блокированию относительного движения рычагов (по отношению к объекту защиты  $m_0$ ). Большими возможностями, в этом плане, обладают подвески с возможностями зубчатого зацепления рычажных устройств.

#### IV. Особенности динамических свойств системы в координатах $y_0, y_1, y_2$

Для построения математической модели системы введен ряд соотношений:

$$\varphi_1 = \frac{y - y_0}{l_1} = a \cdot (y - y_0),$$

$$\varphi_2 = b \cdot (y - y_0), \quad a = \frac{1}{l_1}, \quad b = \frac{1}{l_4}. \quad (16)$$

Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий:

$$T = \frac{1}{2} M \cdot \left( \dot{y}_0 \right)^2 + \frac{1}{2} L l^2 \cdot \left( b \dot{y}_2 - b \dot{y}_0 - a \dot{y}_1 + a \dot{y}_0 \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot (m_1 l_1^2 + m_{10} l_2^2) \cdot \left( \dot{y}_1 - \dot{y}_0 \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot (m_2 l_4 + m_{20} l_3^2) \cdot b^2 \cdot \left( \dot{y}_2 - \dot{y}_0 \right)^2. \quad (17)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_0 \cdot (y_0 - z_0)^2 + \frac{1}{2} k_1 \cdot (y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 \cdot (y_2 - z_2)^2 + \frac{1}{2} k_3 l^2 \cdot \left[ b y_2 - a y_1 + y_0 (a - b)^2 \right] + \frac{1}{2} k_{00} \cdot \left[ y_2 \cdot b l_3 - y_1 \cdot a l_2 + y_0 \cdot (a l_2 - b l_3) \right]^2. \quad (18)$$

Введем ряд обозначений:

$$a - b = a_0, \quad b l_3 = a_1, \quad a l_2 = a_2, \quad a_2 - a_1 = a_3. \quad (19)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_0 \cdot (y_0 - z_0)^2 + \frac{1}{2} k_1 \cdot (y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 \cdot (y_2 - z_2)^2 + \frac{1}{2} k_3 l^2 \cdot \left[ b y_2 - a y_1 + y_0 a_0^2 \right] + \frac{1}{2} k_{00} \cdot \left[ y_2 \cdot a_1 - y_1 \cdot a_2 + y_0 \cdot a_3 \right]^2. \quad (20)$$

Построим систему уравнений движения в координатах  $y_0, y_1, y_2$ .  
Пусть

$$M = m_0 + m_1 + m_2 + m_{10} + m_{20}. \quad (21)$$

Запишем уравнения движения в координатах  $y_0, y_1, y_2$ :

$$\ddot{y}_0 \cdot \left[ M + L l^2 a_0^2 + (m_1 l_1^2 + m_{10} l_2^2) \cdot a^2 + (m_2 l_4 + m_{20} l_3^2) \cdot b^2 \right] + y_0 \cdot \left[ k_0 + k_3 l^2 a_0^2 + k_{00} a_3^2 \right] + \ddot{y}_1 \cdot \left[ -a_0 a L l^2 - (m_1 l_1^2 + m_{10} l_2^2) a^2 \right] + y_1 \cdot \left[ -k_3 l^2 a - k_{00} a_3 a_2 \right] + \ddot{y}_2 \cdot \left[ L l^2 a_0 b - (m_2 l_4 + m_{20} l_3^2) b^2 \right] + y_2 \cdot \left[ k_3 l^2 b + k_{00} a_3 a \right] = k_0 z_0. \quad (22)$$

$$\ddot{y}_0 \cdot \left[ -L l^2 a a_0 - (m_1 l_1^2 + m_{10} l_2^2) \cdot a^2 \right] + y_0 \cdot \left[ -k_3 l^2 a a_0 - k_{00} a_3 a_2 \right] + \ddot{y}_1 \cdot \left[ L l_1 a_1^2 - (m_1 l_1^2 + m_{10} l_2^2) a^2 \right] + y_1 \cdot \left[ k_1 + k_3 l^2 a^2 + k_{00} a_2^2 \right] + \ddot{y}_2 \cdot \left[ -L l^2 a b \right] + y_2 \cdot \left[ -k_3 l^2 a b - k_{00} a_1 a_2 \right] = k_1 z_1. \quad (23)$$

$$\ddot{y}_0 \cdot \left[ L l^2 b a_0 - (m_2 l_4 + m_{20} l_3^2) \cdot b^2 \right] + y_0 \cdot \left[ k_3 l^2 b a_0 + k_{00} a_3 a_1 \right] + \ddot{y}_1 \cdot \left[ -L l^2 b a \right] + y_1 \cdot \left[ -k_3 l^2 a b - k_{00} a_1 a_2 \right] + \ddot{y}_2 \cdot \left[ L l^2 b^2 + (m_2 l_4 + m_{20} l_3^2) \cdot b^2 \right] + y_2 \cdot \left[ k_2 + k_3 l^2 b^2 + k_{00} a_1^2 \right] = k_2 z_2. \quad (24)$$

В табл. 2 приведены коэффициенты уравнений системы в координатах  $y_0, y_1, y_2$ .

Таблица 2

Коэффициенты уравнений в координатах  $y_0, y_1, y_2$ 

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$\left[ M + Ll^2 a_0^2 + (m_1 l_1^2 + m_{10} l_2^2) \cdot a^2 + \right. \\ \left. + (m_2 l_4^2 + m_{20} l_3^2) \cdot b^2 \right] p^2 + \\ + k_0 + k_3 l^2 a_0^2 + k_{00} a_3^2$	$\left[ -Ll^2 a a_0 - (m_1 l_1^2 + m_{10} l_2^2) \cdot a^2 \right] p^2 - \\ - k_3 l^2 a a_0 - k_{00} a_3 a_2$	$\left[ Ll^2 b a_0 - (m_2 l_4^2 + m_{20} l_3^2) \cdot b^2 \right] p^2 + \\ + k_3 l^2 b a_0 + k_{00} a_3 a_1$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$\left[ -Ll^2 a a_0 - (m_1 l_1^2 + m_{10} l_2^2) \cdot a^2 \right] p^2 - \\ - k_3 l^2 a a_0 - k_{00} a_3 a_2$	$\left[ Ll^2 a_1^2 + (m_1 l_1^2 + m_{10} l_2^2) \cdot a^2 \right] p^2 + \\ + k_1 + k_3 l^2 a^2 + k_{00} a_2^2$	$\left[ Ll^2 b^2 + (m_2 l_4^2 + m_{20} l_3^2) \cdot b^2 \right] p^2 - \\ - k_3 l^2 a b - k_{00} a_1 a_2$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$
$\left[ Ll^2 b a_0 - (m_2 l_4^2 + m_{20} l_3^2) \cdot b^2 \right] p^2 + \\ + k_3 l^2 b a_0 + k_{00} a_3 a_1$	$\left[ -Ll^2 a b \right] p^2 - k_3 l^2 a b - \\ - k_{00} a_1 a_2$	$\left[ Ll^2 b^2 + (m_2 l_4^2 + m_{20} l_3^2) \cdot b^2 \right] p^2 + \\ + k_2 + k_3 l^2 b^2 + k_{00} a_1^2$
$Q'_1$	$Q'_2$	$Q'_3$
$k_0 \bar{z}_0$	$k_1 \bar{z}_1$	$k_2 \bar{z}_2$

Примечание.  $Q'_1, Q'_2, Q'_3$  – обобщенные силы соответствуют обобщенным координатам  $y_0, y_1, y_2$ .

Анализ свойств системы с использованием (9) – (12) может быть построен на передаточной функции вида:

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_0}{z} = \frac{k_0 \cdot (a_{22} a_{33} - a_{23}^2) + k_1 (a_{13} a_{32} - a_{12} a_{23}) + k_2 (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{33})}{A_0} \quad (25)$$

Из (25) могут быть получены условия возникновения режимов динамического гашения по координате  $y_0$  при различных соотношениях параметров. Поскольку наблюдаемая координата  $y_0$  в системе координат  $y_0, \varphi_1, \varphi_2$  и  $y_0, y_1, y_2$  одинакова, то и частоты динамического гашения будут одинаковыми.

Вместе с тем, при анализе (25) значения коэффициентов  $a_{ij}$  должны браться из табл. 2. Что касается характеристического уравнения, то его общая схема построения остается неизменной, однако при переходе от системы координат  $y_0, \varphi_1, \varphi_2$  к системе  $y_0, y_1, y_2$  между характеристическими уравнениями будут формироваться постоянные множители, определяющие согласование

размерностей переменных состояния (линейные и угловые).

#### V. Учет особенностей зубчатого соединения рычажных секторов

Рассматривается система с двумя степенями свободы, как показано на рис. 3.

В схеме (рис. 3) реализуется зубчатое зацепление, что обеспечивает связь угловых скоростей вращения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ :

$$\varphi_1 r_1 = \varphi_2 r_2, \quad \varphi_2 = \varphi_1 \frac{r_1}{r_2};$$

при этом вращения происходят в разных направлениях. Выражение для потенциальной энергии имеет вид:

$$\Pi = \frac{1}{2} k_0 \cdot (y_0 - z_0)^2 + \frac{1}{2} k_1 \cdot (y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 \cdot (y_2 - z_2)^2 + \frac{1}{2} k_3 \cdot (\varphi_2 + \varphi_1)^2 l^2. \quad (26)$$

Последний член выражения (26) может быть преобразован:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_1 \frac{r_1}{r_2} = \varphi_1 \left( \frac{r_1 + r_2}{r_2} \right) = \varphi_1 (1 + i).$$

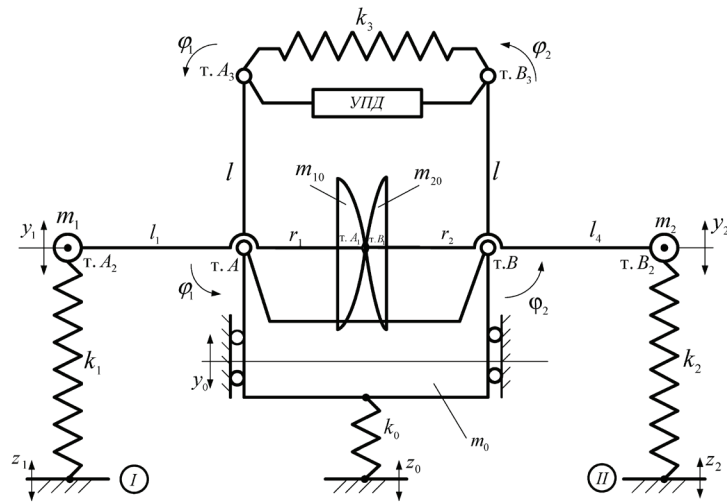


Рис. 3. Расчетная схема системы с зубчатой передачей в контакте двух рычажных секторов

Тогда потенциальная энергия системы определится:

$$\Pi = \frac{1}{2}k_0 \cdot (y_0 - z_0)^2 + \frac{1}{2}k_1 \cdot (y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2 \cdot (y_2 - z_2)^2 + \frac{1}{2}k_3 \cdot \varphi_1^2 \cdot (1+i)^2 l^2. \quad (27)$$

Рычажные сектора имеют массоинерционные свойства:

$$J_1 = m_1 l_1^2 + m_{10} r_1^2; \quad (28)$$

$$J_2 = m_2 l_4^2 + m_{20} r_2^2. \quad (29)$$

Выражение для кинетической энергии системы имеет вид:

$$T = \frac{1}{2}M \cdot (\dot{y}_0)^2 + \frac{1}{2}(J_1 + J_2 i^2) \cdot (\dot{\varphi}_1)^2 + \frac{1}{2}Ll^2 (1+i)^2 \cdot (\dot{\varphi}_1)^2. \quad (30)$$

Так как:

$$y_1 = y_0 - \varphi_1 l_1; \quad y_2 = y_0 - \varphi_2 l_4,$$

то в общем виде:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_{10} + m_{20} + m_0) \cdot (\dot{y}_0)^2 + \frac{1}{2}J_1 (\dot{\varphi}_1)^2 + \frac{1}{2}J_2 (\dot{\varphi}_1)^2 i^2 + \frac{1}{2}Ll^2 \dot{\varphi}_1 (1+i)^2. \quad (31)$$

Сделаем ряд промежуточных выкладок:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_0} = \frac{1}{2}M \cdot \dot{y}_0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = \dot{\varphi}_1 \cdot (J_1 + J_2 i^2 + Ll^2 (1+i)^2).$$

Запишем ряд соотношений:

$$y_1 = y_0 + \varphi_1 l_1; \quad y_2 = y_0 + \varphi_1 l_4 i; \quad y_1 - y_2 = \varphi_1 (l_1 - l_4 i);$$

$$\varphi_1 = \frac{y_1 - y_2}{(l_1 - l_4 i)}. \quad (32)$$

Таким образом, потенциальная энергия системы определится:

$$\Pi = \frac{1}{2}k_0 \cdot (y_0 - z_0)^2 + \frac{1}{2}k_1 \cdot (y_0 + \varphi_1 l_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2 \cdot (y_0 + \varphi_1 l_4 - z_2)^2 + \frac{1}{2}k_3 \cdot \varphi_1^2 \cdot (1+i)^2 l^2. \quad (33)$$



Сделаем ряд вспомогательных преобразований и запишем уравнения движения системы в координатах  $y_0$  и  $\varphi_1$ :

$$\ddot{y}_0 M + y_0 [k_0 + k_1 + k_2] + \varphi_1 [k_1 l_1 + k_2 l_4 i] = k_0 z_0 + k_1 z_1 + k_2 z_2. \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 \cdot [J_1 + J_2 i^2 + L l^2 (1+i)^2] + \varphi_1 \cdot [k_1 l_1^2 + k_4 l_4^2 i^2 + k_3 l^2 (1+i)^2] + \\ + y_0 \cdot [k_1 l_1^2 + k_2 l_4 i] = k_1 l_1 z_1 + k_2 l_4 i z_2. \end{aligned} \quad (35)$$

Коэффициенты уравнений (34), (35) приведены в табл. 3.

Таблица 3

Коэффициенты системы уравнений в координатах  $y_0, \varphi_1$

$a_{11}$	$a_{12}$
$Mp^2 + k_1 + k_2 k_0$	$k_1 l_1 + k_2 l_4 i$
$a_{21}$	$a_{22}$
$k_1 l_1 + k_2 l_4 i$	$J_1 + J_2 i^2 + L l^2 (1+i)^2 p^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_4^2 i^2 + k_3 l^2 (1+i)^2$
$Q_1''$	$Q_2''$
$k_0 z_0 + k_1 z_1 + k_2 z_2$	$k_1 l_1 z_1 + k_2 l_4 i z_2$

Примечание.  $Q_1'', Q_2''$  – обобщенные силы, соответствующие координатам  $y_0$  и  $\varphi$ .

На рис. 4 приведена структурная схема системы в координатах  $y_0$  и  $\varphi$ . В этой системе межпарциальные связи носят упругий характер.

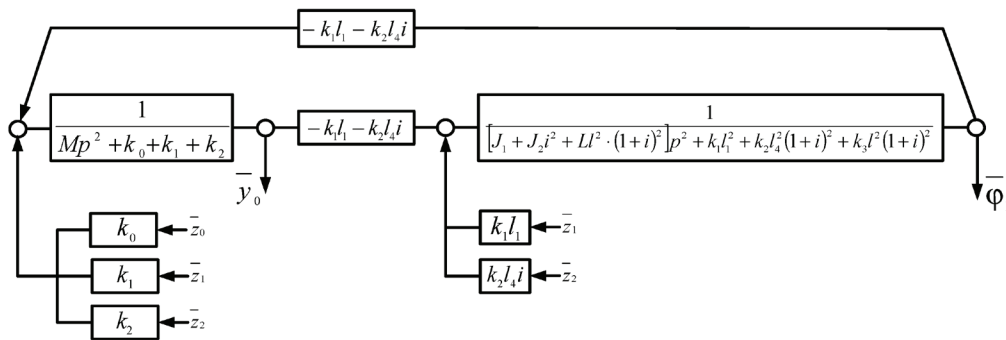


Рис. 4. Структурная схема системы (рис. 1) с зубчатыми секторами

Пусть  $z_1 = 0, z_2 = 0$ . Тогда передаточная функция примет вид:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_0}{z_0} = \frac{k_0 \cdot \left\{ [J_1 + J_2 i^2 + L l^2 \cdot (1+i)^2] p^2 + k_1 l_1^2 + k_2 l_4^2 (1+i)^2 + k_3 l^2 (1+i)^2 \right\}}{[a_{11}] \cdot [a_{22}] - (k_1 l_1 + k_2 l_4 i)^2}. \quad (36)$$

Из (36) можно определить частоту динамического гашения ( $z_0 = z; z_1 = 0; z_2 = 0$ ):

$$\omega^2 = \frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_4^2 (1+i)^2 + k_3 l^2 (1+i)^2}{J_1 + J_2 i^2 + L l^2 \cdot (1+i)^2}. \quad (37)$$

Аналогичным образом могут быть найдены и другие режимы динамического гашения, возникающие при различных вариантах сочетания внешних воздействий.

Возможности настройки системы определяются параметрами системы: жесткостью  $k_3$ , длинами плеч рычагов ( $l$ ), передаточным отношением  $i$  и массо-инерционными свойствами зубчатых секторов. Отметим, что система имеет две резонансные частоты (или частоты собственных колебаний), которые могут быть найдены из характеристического уравнения (36).

### Заключение

Таким образом, механическая система с рычажными связями, рассматриваемая в динамических взаимодействиях с вибрирующим основанием обладает расширенным набором адаптационных свойств. При обеспечении упругой связи  $k_{00}$  между настроечными массами ( $m_1, m_2, m_{10}, m_{20}$ ) система может иметь два режима динамического гашения. В качестве настроечных параметров могут выступать жесткость пружины  $k_3$  и инерционные свойства УПД (через  $LP$ ).

При введении зубчатой передачи между рычажными секторами система теряет одну степень свободы, однако адаптационные возможности в гашении внешних кинематических воздействий могут быть поддержаны введением передаточных отношений между рычажными секторами и выбором других настроечных параметров.

1. Предлагается метод построения и анализа динамических свойств системы на основе математических моделей, построенных с учетом рычажных связей, реализуемых рычажными секторами.

2. Рычажные сектора могут рассматриваться как новый элемент механических колебательных систем, обладающий расширенными возможностями динамических воздействий, в частности, из-за простоты применения и использования активных средств приложения управляемых моментов сил для изменения динамического состояния.

### Список литературы

1. Махутов Н.А., Петров В.П., Куксова В.И., Москвитин Г.В. Современные тенденции развития научных исследований по проблемам машиноведения и машиностроения // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2008. №3. С. 3-19.
2. Ганиев Р.Ф. Проблемы динамики машин и технологий. Перспективы развития института машиноведения им. А.А. Благодрава // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. №3. С. 3-20.
3. Брысин А.Н., Синев А.В. Новые подходы в решении задач виброизоляции // Проблемы машиностроения и автоматизации. № 3. 2008. С.74-83.
4. Бурдюков С.Ф., Мирошников И.В., Стыльмаков Р.Э. Системы управления движением колесных роботов. СПб.: Наука. 2001. 227 с.
5. Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Сочленения звеньев в динамике механических колебательных систем. – Иркутск: ИрГУПС. 2012. 156 с.
6. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Ситов И.С. Динамика механических систем. Рычажные и инерционно-упругие связи. СПб.: Политехника. 2013. 319 с.: ил.
7. Елисеев С.В., Пискунова В.А., Савченко А.А. Взаимодействие твердых тел в колебательных системах с упругими связями и сочленениями при действии внешнего вибрационного возмущения // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. №1. DOI:10.7463/0113 0486817.
8. Елисеев С.В., Артюнин А.И., Каимов Е.В. Особенности динамических взаимодействий в системах подвески транспортных средств с устройством для преобразования движения // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2013. №7. С.11-20.
9. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б. Прикладные задачи структурной теории виброзащитных систем. – СПб: Политехника. 2013. 374 с.
10. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем. Новосибирск: Наука, 2011. 394 с.
11. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Системный анализ и математическое моделирование в мехатронике виброзащитных систем. Иркутск: ИрГУПС. 2012. 288 с.
12. Дружинский И.А. Механические цепи. – М.: Машиностроение. 1977. – 238 с.
13. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б. Возможности динамических взаимодействий механических колебательных систем при связанных внешних силах // Системы. Методы. Технологии. 2012. №4. С.29-32.
14. Елисеев С.В., Лончих П.А. Влияние управляющей силы в структурные внешние возмущения // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2011. Т.51. №4. С.26-33.