УДК 531.38

СВОЙСТВА ПАРАМЕТРОВ РОДРИГА-ГАМИЛЬТОНА В ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Данилюк Д.А.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, Украина,
e-mail: daniljuk@bk.ru

Исследована зависимость от времени параметров Родрига-Гамильтона в решениях Бобылева-Стеклова, Лагранжа, Гриоли и Гесса уравнений движения тела с неподвижной точкой. Получены типы инвариантных соотношений в указанных решениях.

Ключевые слова: параметры Родрига-Гамильтона (Р.-Г.), решения уравнений Эйлера-Пуассона, инвариантные соотношения (ИС)

PROPERTIES OF THE RODRIGUES-HAMILTON PARAMETERS OF PARTIAL SOLUTIONS OF EQUATIONS OF A RIGID BODY DYNAMICS

Daniljuk D.A.

Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine, Donetsk, Ukraine,
e-mail: daniljuk@bk.ru

The paper studies the time dependenceof Rodrigues-Hamilton parametersin decisions Bobylev-Steklov, Lagrange,Grioli and Hess solutions for equationsof motion of a rigid body with a fixed point. Types of invariant relations obtained in these solutions.

Keywords: Rodrigues-Hamilton parameters (R.-H.), solutions of the Euler-Poisson equations, invariant relations (IR)

Введение

В динамике твердого тела для изучения свойств движения применяются различные методы и параметры (метод инвариантных соотношений (ИС)[10], углы Эйлера [1-4], параметры Родрига-Гамильтона (Р.-Г.)[5-7,11] и другие). На их базе получена значительная информация о движении твердого тела под действием силы тяжести [2,3] и под действием потенциальных и гироскопических сил [4]. Использование параметров Р.-Г. актуально не только в задачах ориентации движущихся объектов [7,11], но и при изучении колебаний тяжелого твердого тела с неподвижной точкой [5]. Поэтому представляет интерес исследование свойств параметров Р.-Г. в частных решениях уравнений Эйлера-Пуассона.

Данная статья посвящена изучению зависимостей от времени параметров Р.-Г. в решениях Бобылева-Стеклова, Лагранжа, Гриоли и Гесса, и исследованию структуры ИС в этих решениях.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнения движения твердого тела под действием силы тяжести [1-3]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + s(\mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (1)$$

Здесь обозначено: $\omega=(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ − вектор угловой скорости; $\nu=(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ − единичный вектор, указывающий направление силы тяжести; $A=(A_{ij})$ − тензор инерции; $e=(e_1, e_2, e_3)$ − единичный вектор $\frac{\overline{OC}}{|\overline{OC}|}$, где O − неподвижная точка, C − центр тяжести тела; $s = mg|\overline{OC}|$, где m − масса тела, g − ускорение свободного падения.

Уравнения (1) имеют первые интегралы

$$A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} - 2s(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \quad A\,\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu} = k, \quad (2)$$

где E и k − произвольные постоянные.

Пусть θ,φ,ψ − углы Эйлера, введенные таким образом, что $\theta=\angle(e,\nu)$, φ − скорость собственного вращения вокруг вектора e, ψ – скорость прецессии вокруг вектора ν. Тогда [8]

$$\omega_1 = \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi + \dot{\theta}\cos\phi, \quad \omega_2 = \dot{\psi}\sin\theta\cos\phi - \dot{\theta}\sin\phi, \quad \omega_3 = \dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta, \quad (3)$$

$$\nu_1 = \sin\theta\sin\phi, \quad \nu_2 = \sin\theta\cos\phi, \quad \nu_3 = \cos\theta. \quad (4)$$

Если известно решение уравнений (1)

$$\omega_i = \omega_i(t), \quad \nu_i = \nu_i(t), \quad (i = \overline{1,3}), \quad (5)$$

то углы Эйлера можно определить из (3), (4)

$$\theta = \arccos\nu_3, \quad \phi = arg\,\mathrm{tg}\frac{\nu_1}{\nu_2}, \quad \psi = \int_{t_0}^{t}\frac{\omega_1(\tau)\nu_1(\tau)+\omega_2(\tau)\nu_2(\tau)}{\nu_1^2(\tau)+\nu_2^2(\tau)}d\tau. \tag{6}$$

Параметры Р.-Г. выражаются через переменные (6) следующим образом [8]:

$$\begin{gathered}\lambda_0 = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi+\phi}{2}, \quad \lambda_1 = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi-\phi}{2}, \\ \lambda_2 = \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi-\phi}{2}, \quad \lambda_3 = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi+\phi}{2}.\end{gathered} \tag{7}$$

Они удовлетворяют соотношению

$$\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2 = 1. \tag{8}$$

Если известны параметры Р.-Г., то углы Эйлера определим из формул

$$\mathrm{tg}\phi = \frac{\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2}{\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3}, \quad \mathrm{tg}\psi = \frac{\lambda_0\lambda_2+\lambda_1\lambda_3}{\lambda_0\lambda_1-\lambda_2\lambda_3}, \tag{9}$$

а ν_i из равенств

$$\nu_1 = 2(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2), \quad \nu_2 = 2(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3), \quad \nu_3 = \lambda_0^2+\lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2. \tag{10}$$

Для записи уравнений (1) в параметрах Р.-Г. необходимо в эти уравнения подставить значения (10). Например, в главной подвижной системе координат уравнения Эйлера-Пуассона (1) принимают вид

$$\begin{gathered}\mathrm{A}_1\dot{\omega}_1 = (\mathrm{A}_2-\mathrm{A}_3)\omega_2\omega_3 + s[e_2(\lambda_0^2+\lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2) - 2e_3(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)], \\ \mathrm{A}_2\dot{\omega}_2 = (\mathrm{A}_3-\mathrm{A}_1)\omega_3\omega_1 + s[2e_3(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2) - e_1(\lambda_0^2+\lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2)], \\ \mathrm{A}_3\dot{\omega}_3 = (\mathrm{A}_1-\mathrm{A}_2)\omega_1\omega_2 + 2s[e_1(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3) - e_2(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)],\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}2\dot{\lambda}_0 = -(\omega_1\lambda_1+\omega_2\lambda_2+\omega_3\lambda_3), \\ 2\dot{\lambda}_1 = \omega_1\lambda_0+\omega_3\lambda_2-\omega_2\lambda_3, \\ 2\dot{\lambda}_2 = \omega_2\lambda_0+\omega_1\lambda_3-\omega_3\lambda_1, \\ 2\dot{\lambda}_3 = \omega_3\lambda_0+\omega_2\lambda_1-\omega_1\lambda_2.\end{gathered} \tag{12}$$

Уравнения (11) с помощью формул

$$\begin{gathered}\omega_1 = 2(\lambda_0\dot{\lambda}_1-\lambda_1\dot{\lambda}_0+\lambda_3\dot{\lambda}_2-\lambda_2\dot{\lambda}_3), \\ \omega_2 = 2(\lambda_0\dot{\lambda}_2-\lambda_2\dot{\lambda}_0+\lambda_1\dot{\lambda}_3-\lambda_3\dot{\lambda}_1), \\ \omega_3 = 2(\lambda_0\dot{\lambda}_3-\lambda_3\dot{\lambda}_0+\lambda_2\dot{\lambda}_1-\lambda_1\dot{\lambda}_2)\end{gathered} \tag{13}$$

можно привести к системе трех дифференциальных уравнений на параметры λ1, λ2, λ3 [5,7].Интегралы (2) преобразуются очевидным образом на основе (10).

2. Решение Бобылева-Стеклова

Пусть в уравнениях (1) e=(1,0,0), A=diag($2A_2, A_2, A_3$), а в интегралах (2) значения постоянных таковы:

$$2E = A_1\chi^2 + H, \quad k = \frac{2A_2H}{s},$$

где x, H − параметры.Тогда уравнения (1) допускают решение [9] (поскольку формулы (3), (10) для параметров Р.-Г. записаны в другой системе координат по сравнению с рассматриваемым решением, то для новых переменных используем “~”)

$$\tilde{\omega}_1 = \chi, \quad \tilde{\omega}_3 = 0, \quad \tilde{\nu}_1 = \frac{1}{s}\left(\frac{A_2}{2}\tilde{\omega}_2^2 + H\right), \quad \tilde{\nu}_2 = -\frac{\chi A_2}{s}\tilde{\omega}_2,$$
$$\tilde{\nu}_3 = \frac{1}{s}\sqrt{f(\tilde{\omega}_2)}, \qquad \frac{d\tilde{\omega}_2}{dt} = -\frac{1}{A_2}\sqrt{f(\tilde{\omega}_2)}, \tag{14}$$

где

$$f(\tilde{\omega}_2) = -\frac{A_2^2}{4}\tilde{\omega}_2^4 - A_2(\chi^2 A_2 + H)\tilde{\omega}_2^2 + s^2 - H^2. \tag{15}$$

Из (14) следует, что подвижный годограф вектора угловой скорости − отрезок прямой.

Опуская знак “~” представим решение (14), (15) в эллиптических функциях, используя систему координат, в которой записаны соотношения (3)– (6):

$$\nu_1 = -\frac{\chi A_2}{s}\tilde{\lambda}_0\sqrt{2}\,\mathrm{cn}(\tilde{\lambda}_0 t),$$
$$\nu_2 = \sqrt{\left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(3)}\right)\left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}\right)}\,\mathrm{dn}(\tilde{\lambda}_0 t)\,\mathrm{sn}(\tilde{\lambda}_0 t),$$
$$\nu_3 = \nu_1^{(2)} - \left(\nu_1^{(2)} - \nu_3^{(1)}\right)\mathrm{sn}^2(\tilde{\lambda}_0 t),$$
$$\omega_1 = \tilde{\lambda}_0\sqrt{2}\,\mathrm{cn}(\tilde{\lambda}_0 t), \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \chi, \tag{16}$$

где

$$\nu_1^{(1)} = \frac{H}{s}, \quad \nu_1^{(2,3)} = \frac{1}{s}\left(-\chi^2 A_2 \pm \sqrt{\chi^4 A_2^2 + 2\chi^2 A_2 H + s^2}\right),$$
$$\tilde{\lambda}_0 = \sqrt{s\left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(3)}\right)/A_2}, \quad -s < H < s, \tag{17}$$

а переменная ν_3 изменяется в промежутке $\left[\nu_1^{(1)}, \nu_1^{(2)}\right]$, где эти значения указаны в формулах (17).Эллиптические функции (16) имеют модуль

$$k_1 = \left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}\right)/\left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(3)}\right). \tag{18}$$

Для нахождения параметров Р.-Г. в решении Бобылева-Стеклова воспользуемся соотношениями (6) и (16)

$$\cos\theta(t) = \nu_1^{(2)} - \left(\nu_1^{(2)} - \nu_3^{(1)}\right)\mathrm{sn}^2(\tilde{\lambda}_0 t), \tag{19}$$

$$\mathrm{tg}\,\phi(t) = \frac{\nu_1(t)}{\nu_2(t)} = -\frac{\chi A_2\tilde{\lambda}_0\sqrt{2}\,\mathrm{cn}(\tilde{\lambda}_0 t)}{s\sqrt{\left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(3)}\right)/\left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}\right)}\,\mathrm{dn}(\tilde{\lambda}_0 t)\,\mathrm{sn}(\tilde{\lambda}_0 t)}, \tag{20}$$

$$\psi(t) = -\frac{s}{A_2}\int_0^t \frac{d\tau}{1 + \left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}\right)\mathrm{ctg}^2\,\phi(\tau)}. \tag{21}$$

Зависимость параметров $\lambda_i (i = \overline{0,3})$ от времени найдем из соотношений (7) с учетом формул (19)-(21).Обозначим

$$h(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{\nu_1^{(2)} - \lambda_0^2 - \lambda_3^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}}. \tag{22}$$

С помощью (22) из равенств (19), (20) определим ИС на параметры Р.-Г. для случая Бобылева-Стеклова:

$$s^2\left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(3)}\right)\left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}\right)h(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)^2\left(1 - k_* h(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\right) =$$
$$= 2\chi^2 A_2^2 \tilde{\lambda}_0^2\left(1 - h(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\right)(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)^2, \tag{23}$$

где k_* − сопряженный к k_1 модуль эллиптических функций.Итак ИС (23) является многочленом по параметрам Р.-Г. восьмого порядка.

Последняя формула из системы (21) представляет интерес, поскольку из неё следует достаточно наглядное представление скорости прецессии от угла собственного вращения тела

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{s}{A_2}\cdot\frac{1}{\left[1+\left(\nu_1^{(2)}-\nu_1^{(1)}\right)\mathrm{ctg}^2\,\phi(\tau)\right]}.$$

ИС для компонент вектора угловой скорости в силу (14) имеет линейный характер.

3. Сферический гороскоп (изоконические движения)

Рассмотрим тяжелое твердое тело, эллипсоид инерции которого является сферой: $A_3=A_2=A_1$ Выбором системы координат можно принять $s_2=s_1=0$. Тогда из (1), (2) имеем

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{s}{A_1}\nu_2,\quad \dot{\omega}_2 = \frac{s}{A_1}\nu_1,\quad \dot{\omega}_3 = 0, \tag{24}$$

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2-\omega_2\nu_3,\quad \dot{\nu}_2 = \omega_1\nu_3-\omega_3\nu_1,\quad \dot{\nu}_3 = \omega_2\nu_1-\omega_1\nu_2, \tag{25}$$

$$\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2 = 2(s\nu_3+E)/A_1,\quad \nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2 = 1, \tag{26}$$

$$\omega_1\nu_1+\omega_2\nu_2+\omega_3\nu_3 = k/A_1. \tag{27}$$

Изучим изоконические движения сферического гироскопа [2,4].Для этих движений подвижный и неподвижный годографы вектора угловой скорости симметричны относительно касательной плоскости к аксоидам. При этом необходимым и достаточным условием является ИС

$$\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\nu}-\mathbf{c}), \tag{28}$$

где c − единичный вектор, неизменно связанный с телом. Положим c=(0,0,1)[4]. Тогда из (28) следует

$$\omega_1\nu_1+\omega_2\nu_2+\omega_3(\nu_3-1) = 0. \tag{29}$$

Уравнения (24), (25) и интегралы (26) описывают движение гироскопа Лагранжа для случая сферического распределения масс. Из третьего уравнения системы (24) получим $\omega_3=c^*$, где c^* − произвольная постоянная. Потребуем, чтобы (29) было следствием (27). Тогда для ω_3 имеем следующее значение

$$\omega_3 = k/A_1. \tag{30}$$

В [4] показано, что, если компоненты угловой скорости заданы в виде (3), то (29) выполняется при условии, когда в соотношениях (3) $\psi=\varphi$. Сравнивая (3) и (30), получим

$$\dot{\phi} = k/A_1(1+\cos\theta). \tag{31}$$

Для получения уравнения на функцию $\theta(t)$ воспользуемся первым уравнением из (26) и соотношениями (3)

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{a_2\cos^2\theta+a_1\cos\theta+a_0}{1+\cos\theta}}, \tag{32}$$

где $a_2 = 2s/A_1$, $a_1 = 2(s+E)/A_1$, $a_0 = 2(EA_1-k^2)/A_1^2$.

При преобразовании решения уравнения (32) к эллиптическим функциям запишем его в виде

$$\dot{\nu}_3 = \sqrt{(1-\nu_3)(a_2\nu_3^2+a_1\nu_3+a_0)}. \tag{33}$$

Без ограничения общности считаем $s>0$. Тогда переменная ν_3 изменяется в промежутке

$$\nu_3^{(1)} \le \nu_3 \le 1,\quad \nu_3^{(1)} = \frac{-a_1+\sqrt{a_1^2-4a_0\,a_2}}{a_2}. \tag{34}$$

Из уравнения (33) в силу (31) получим

$$\nu_3 = 1-\left(1-\nu_3^{(1)}\right)\mathrm{sn}^2(gt), \tag{35}$$

где sn(gt) − эллиптическая функция с модулем k_2 и параметром g, имеющими следующие значения

$$k_2 = \frac{1-\nu_3^{(1)}}{1-\nu_3^{(2)}}, \quad \nu_3^{(2)} = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{a_2}, \quad g = \sqrt{\frac{s(1-\nu_3^{(2)})}{2A_1}}. \tag{36}$$

Таким образом, на основании (35) и равенства $\nu_3=\cos\theta$ можно записать

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\left(\nu_3^{(1)} - 1\right)\mathrm{sn}^2(gt), \quad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\left(2 - \left(1-\nu_3^{(1)}\right)\mathrm{sn}^2(gt)\right). \tag{37}$$

Функцию $\varphi(t)$ определим из (31) в силу (35)

$$\phi(t) = \frac{k}{A}\int_0^t \frac{dt}{2-\left(1-\nu_3^{(1)}\right)\mathrm{sn}^2(gt)}. \tag{38}$$

В случае изоконичных движений сферического гироскопа для параметров Р.-Г. из (7) получим

$$\begin{gathered}\lambda_0 = \cos\frac{\theta}{2}\cos\phi, \qquad \lambda_1 = \sin\frac{\theta}{2}, \\ \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_3 = \cos\frac{\theta}{2}\sin\phi,\end{gathered} \tag{39}$$

где функции $\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}$, находятся из (37), а функция $\varphi(t)$ из (38), в которых необходимо учесть равенства (36). Таким образом для рассматриваемых движений найдены зависимости параметров Р.-Г. от времени − соотношения (39). Из них следует, что одно ИС имеет линейный вид. Другое ИС для уравнений (11) тоже линейное, но оно линейно по отношению к компоненте ω_3. Следовательно, в случае сферического гиростата для этих уравнений имеем два линейных ИС по отношению к переменным задачи.

4. Решения, описывающие прецессионные движения тела

В динамике твердого тела особую роль играют решения, которые характеризуются прецессионными движениями тела. В книге [4] показано существование прецессий тела относительно оси, не совпадающей с вектором ν.

Пусть ось l_1 с единичным вектором a и с началом в неподвижной точке неизменна по отношению к телу и составляет постоянный угол θ_0 с осью l_2, которая неподвижна в пространстве. Обозначим через γ − вектор, принадлежащий оси l_2. Для прецессий выполнятся следующие кинематические уравнения [4]

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}, \tag{40}$$

где

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 1, \quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \quad \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma} = 1, \quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\gamma} = c_0 = \cos\chi_0. \tag{41}$$

Класс прецессий твердого тела, имеющего неподвижную точку, характеризуется инвариантными соотношениями [4]

$$\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\gamma} = a_0, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\mathbf{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\gamma}. \quad (a_0 = \cos\angle(\mathbf{a},\boldsymbol{\gamma})). \tag{42}$$

Если неподвижную систему координат связать с вектором a, то есть третью ось её направить по вектору a=(0,0,1), то имеют место соотношения

$$\gamma_1 = a_0'\sin\phi, \quad \gamma_2 = a_0'\cos\phi, \quad \gamma_3 = a_0, \tag{43}$$

Они удовлетворяют кинематическому уравнению для вектора γ из (40) и соотношению γ^2=1 из (41). Для вектора ν в [4] получено следующее разложение

$$\boldsymbol{\nu} = (c_0 + a_0b_0'\sin\psi)\boldsymbol{\gamma} - b_0'\mathbf{a}\sin\psi - b_0'(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{a})\cos\psi. \tag{44}$$

Когда вектор ν имеет вид (44), а вектор γ – (43), то кинематическое уравнение для ν из (40) становится тождеством.

При рассмотрении прецессий относительно наклонной оси параметры Р.-Г. можно найти по аналогии с (3), (4), (7). То есть в дальнейшем полагаем

$$\lambda_0 = \cos\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{\psi+\phi}{2}, \quad \lambda_1 = \sin\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{\psi-\phi}{2},$$
$$\lambda_2 = \sin\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{\psi-\phi}{2}, \quad \lambda_3 = \cos\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{\psi+\phi}{2}, \tag{45}$$

где углы θ_0, ψ, φ – углы Эйлера, введенные с помощью неподвижной системы координат, которая связана с вектором γ, (но не с вектором ν, как ранее).

Пример 1 – Решение Д. Гриоли. Пусть в уравнениях (1) e=(0,0,1), компоненты тензора A удовлетворяют равенствам

$$A_{23} = 0, \quad A_{13} = 0, \quad A_{13} \neq 0, \quad A_{22} = A_{11}, \tag{46}$$

параметр S имеет значение

$$s = m^2\sqrt{A_{13}^2 + A_{33}^2}. \tag{47}$$

Тогда при выполнении (46), (47) уравнения (1) допускают решение Д. Гриоли[13], которое запишем в обозначениях [4]

$$\omega_1 = m\sin mt, \quad \omega_2 = m\cos mt, \quad \omega_3 = m, \tag{48}$$

$$\nu_1 = \cos\chi_0\sin mt - \sin\chi_0\cos^2 mt, \quad \nu_2 = \cos\chi_0\cos mt + \sin\chi_0\sin 2mt/2,$$
$$\nu_3 = -\sin\chi_0\sin mt \quad (\operatorname{tg}\chi_0 = A_{13}/A_{33}), \tag{49}$$

характеризующееся регулярной прецессией тела относительно наклонной оси (угол между этой осью и вектором γ приведен выше, а угол $\theta_0 = \pi/2$).

Указанное свойство можно доказать следующим образом. На основании решения (48), (49) получим, что вектор γ с компонентами в подвижном пространстве

$$\gamma_1 = \sin mt, \quad \gamma_2 = \cos mt, \quad \gamma_3 = 0 \tag{50}$$

не изменяет своего положения в неподвижном пространстве. В процессе движения выполняется инвариантное соотношение e·γ=0, то есть вектор e перпендикулярен вектору γ ($\theta_0 = \pi/2$). Угловая скорость тела в силу соотношений (50) в векторном виде такова:

$$\boldsymbol{\omega} = m(\mathbf{e} + \boldsymbol{\gamma}). \tag{51}$$

Из формулы (51) следует, что в (42), (45) $\phi=\psi=m$. Выберем неподвижную систему так, что $\phi=\psi=mt$ (t – время). Подставив $\theta_0 = \pi/2$, $\phi=\psi=mt$ в соотношения (45) имеем

$$\lambda_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos mt, \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin mt. \tag{52}$$

Из (52) следует, что имеют место два линейных ИС на параметры (45). Для получения зависимостей компонент вектора ν от параметров Р.-Г. подставим cosmt, sinmt из (52)в (49):

$$\nu_1 = \sqrt{2}(\lambda_3\cos\chi_0 - \sqrt{2}\lambda_0^2\sin\chi_0), \quad \nu_2 = \sqrt{2}\lambda_0(\cos\chi_0 + \sqrt{2}\lambda_3\sin\chi_0), \quad \nu_3 = -\sqrt{2}\sin\chi_0\,\lambda_3, \tag{53}$$

при этом компоненты ω_i из (48) выражаются через параметры Р.-Г. следующим образом

$$\omega_1 = \sqrt{2}m\lambda_3, \quad \omega_2 = \sqrt{2}m\lambda_0, \quad \omega_3 = m. \tag{54}$$

Соотношения (53), (54) являются решением уравнений (1), если в них учесть условия (46), (47).

Пример 2 − Решение В. Гесса. Как показал А. Брессан[12], в решении В. Гесса[14] при нулевом значении постоянной интеграла моментов из (2) имеет место прецессия относительно горизонтальной оси. То есть

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0 \qquad (55)$$

и в формуле (44) $\chi_0=\pi/2$, $\theta_0 = \pi/2$. Для записирешения, описывающего данную прецессию, воспользуемся введенной выше системой координат e=(0,0,1). Пусть компоненты тензора A_{ij} удовлетворяют условиям [4]

$$A_{12} = 0, \ \ A_{23} = 0, \ \ A_{13}^2 = A_{33}(A_{11} - A_{22}). \qquad (56)$$

Следуя обозначениям [4], имеем

$$\boldsymbol{\gamma} = (\sin\phi, \cos\phi, 0), \quad \boldsymbol{\omega} = \left(\dot{\psi}\sin\phi, \dot{\psi}\cos\phi, \dot{\phi}\right), \qquad (57)$$

$$A\boldsymbol{\omega} = \left(A_{11}\dot{\psi}\sin\phi, A_{22}\dot{\psi}\cos\phi, A_{13}\dot{\psi}\sin\phi + A_{33}\dot{\phi}\right), \qquad (58)$$

$$\boldsymbol{\nu} = (-\cos\phi\cos\psi, \sin\phi\cos\psi, -\sin\psi), \qquad (59)$$

где

$$\dot{\phi} = -\frac{A_{13}}{A_{33}}\dot{\psi}\sin\phi, \quad \dot{\psi} = \sqrt{\frac{2}{A_{22}}(E - s\sin\psi)}. \qquad (60)$$

Выпишем решение уравнений (60). Из первого уравнения данной системы имеем [4]

$$\sin\phi = \frac{1}{\operatorname{ch} u}, \quad u = \frac{A_{13}}{A_{33}}\psi + c, \qquad (61)$$

где c − произвольная постоянная. Формулы (57) − (59) характеризуют все переменные задачи (1).

Для нахождения решения $\psi(t)$ из второго уравнения системы (60) положим

$$\beta_1 = \frac{2E}{A_{22}}, \quad \beta_2 = -\frac{2s}{A_{22}}, \quad E > s, \quad \mu = \frac{1}{2}\sqrt{\beta_1 - \beta_2}, \quad k_3 = \sqrt{\frac{-\beta_2}{2\mu^2}}. \qquad (62)$$

Тогда из (60), (62) получим

$$\psi = 2\operatorname{am}\mu t - \frac{\pi}{2}, \quad \sin\frac{\psi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{sn}\mu t - \operatorname{cn}\mu t), \quad \cos\frac{\psi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{sn}\mu t + \operatorname{cn}\mu t), \qquad (63)$$

где μt, snμt, cnμt − эллиптические функции, имеющие модуль k_3 из (62). Параметры Р.-Г. имеют вид

$$\lambda_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\psi+\phi}{2}, \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\psi-\phi}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\psi-\phi}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\psi+\phi}{2}, \qquad (64)$$

где функции $\psi(t)$, $\varphi(t)$ выражаются из формул (61), (63). Представляет интерес вид ИС для прецессий Брессана-Гесса. Используя (9), (64) и (61), (63) найдем

$$\lambda_0^2 + \lambda_3^2 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_0^2 + \lambda_3^2 = \frac{1}{2}, \qquad (65)$$

$$\frac{\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3}{\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_3} = \operatorname{sh}\left[\frac{A_{13}}{A_{33}}\operatorname{arctg}\frac{\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3}{\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3}\right]. \qquad (66)$$

Таким образом, в случае прецессии относительно горизонтальной оси гироскопа Гесса для параметров Р.-Г. имеет место два квадратичных ИС (65) и одно ИС трансцендентного вида (66).

Заключение

Исследованы свойства параметров Р.-Г. в решениях уравнений Эйлера-Пуассона, моделирующего движение тяжелого твердого тела, в случаях Бобылева-Стеклова, Лагранжа, Гриоли и Гесса. Полученные результаты могут быть применены в истолковании движения тела.

Автор выражает благодарность профессору Г.В. Горру за внимание к работе.

Список литературы

1. Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М. Классические задачи динамики твердого тела. − Киев: Наукова думка, 2012. − 401 с.

2. Горр Г.В., Ковалев А.М. Движение гиростата. − Киев: Наукова думка, 2013. − 408 с.

3. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние − Киев: Наукова думка, 1978. − 296 с.

4. Горр Г.В., Мазнев А.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. − Донецк: ДонНУ, 2010. − 364 с.

5. Ковалев А.М., Данилюк Д.А. Линейные нормальные колебания твердого тела в параметрах Родрига-Гамильтона // Механика твердого тела. − 2003. − Вып. 33. − С. 3-9.

6. Козлов В.В. Уравнения Гамильтона задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в избыточных координатах // Теоретическая и прикладная механика. − Белград: Югославское общество механики, 1982. − № 8. − С.59-65.

7. Кошляков В.Н. Параметры Родрига-Гамильтона и их приложения в механике твердого тела. − Киев: Институт математики НАН Украины, 1994. − 176 с.

8. Лурье А.И. Аналитическая механика. − М.: Физматгиз, 1961. − 824 с.

9. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. − Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та. − 1965. − 221 с.

10. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. − 1969. − Вып. 6. − С. 15-24.

11. Челноков Ю.Н. Об определении ориентации объекта в параметрах Родрига-Гамильтона по его угловой скорости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. − 1977. − № 3. − С.11-20.

12. Bressan A. Sulleprecessionid'un corporigido costituentimoti di Hess // Rendicontidel Seminario Matematicodella Università di Padova, − 1957. T. 27 − P. 276-283.

13. Grioli G. Esistenza e determinazione della precessioni regolari dinamica mente possibili per un solido pesantea simmetrico // Ann. mat. puraed appl. − 1947.T. XXVI, Ser. IV. − P.271-281.

14. Hess W. Über die Eulerschen Bewegungsgleichungen und über eine neue particulare Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Annalen. − 1890.B.37,H.2. − S. 153-181.