УДК 624.131+539.215

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В ТЕОРИИ УПЛОТНЕНИЯ УПРУГОПОЛЗУЧИХ НЕОДНОРОДНЫХ ЗЕМЛЯНЫХ МАСС

Дасибеков А.Д., Юнусов А.А., Сайдахметов П.А., Омашова Г.Ш.

Южно-казахстанский государственный университет им. М. Ауэзова, Шымкент, e-mail: Yunusov1951@mail.ru

В данной работе рассмотрен процесс уплотнения непрерывно неоднородных упругоползучих грунтов, состояние которых описывается новым выражением, определяющим зависимостью между коэффициентом пористости и суммой главных напряжений. На основе этой зависимости найдено основное уравнение уплотнения неоднородных упругоползучих грунтов. Оно в одномерной и двумерной постановке решается применительно для ограниченной области уплотнения. При этом применен метод возмущений успешно используемый в теории упругости неоднородного тела. Полученное решение задачи отражает распределение порового давления в уплотняемом грунтовом массиве конечной мощности. Значения давлений в поровой жидкости дают возможность определить напряжения в скелете грунта и вертикальные перемещения точек верхней поверхности уплотняемого грунтового массива.

Ключевые слова: процесс уплотнения, грунт, деформация, давление, граничные условия, упругоползучих, функции, фильтрации, уравнения

PERTURBATION METHOD IN THE COMPACTION THEORY OF TENSILE-CREEPING HETEROGENEOUS EARTH MASS

Dasibekov A.D., Yunusov A.A., Saydakhmetov P.A., Omashova G.S.

M. Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent, e-mail: Yunusov1951@mail.ru

This work considers compaction process of continuously heterogeneous tensile-creeping soils which condition is described by a new expression determinative by dependence between porosity factor and sum of main stresses. Basic equation for the heterogeneous tensile-creeping soils has been found on the basis of this dependence. Both in one-dimensional and two-dimensional positions it is solved in conformity to the bounded compaction area. At that we have used the perturbation method successfully used in the elasticity theory of heterogeneous body. Received solution of the problem expresses distribution of porous pressure in the compactible soil mass of finite cardinality. Values of pressures in the porous liquid give possibility to determine stresses in the soil skeleton and vertical displacements of points of the upper surface of the compactible soil mass.

Keywords: compaction process, soil, deformation, pressure, boundary conditions, tensile-creeping, functions, filtrations, equations

Как известно, деформативные свойства грунтов меняются вместе с координатами точки, и допущение об их однородности представляет собой идеализацию реальных состояний. Конечно, при условии неоднородности, математическая задача несравненно сложна и, поэтому в таких случаях нередко прибегают к различным родам упрощения модели, приемлемым с той или иной точки зрения. При этом в одной группе задач параметры, характеризующие свойства материала, кусочно постоянны. Это означает, что исследуемое тело состоит из нескольких однородных тел. В другой группе задач они представляют собой непрерывные функции координат точки. Причем грунт, модуль деформации которого непрерывно увеличивается с глубиной, называется непрерывно неоднородным. В связи с этим в данной работе рассмотрим процесс уплотнения непрерывно неоднородных упругоползучих грунтов, состояние которых описывается выражением [1]

$$\Delta\varepsilon(M,t)=\left[1+(n-1)\xi\right]^{-1}\left\{a_0(t)-K_0^*+\alpha_H\eta(M)\left[a_0(t)-\frac{1}{\gamma_H}\Gamma^*\right]\right\}\theta(M,t), \qquad (1)$$

где

$$\Gamma^*\theta(M,t)=\int_{\tau_1}^{t}\theta(M,t)\Gamma(t,\tau)d\tau;\ \Gamma(t,\tau)=K_0(t,\tau)+(\gamma_H-1)\frac{\partial a_0(\tau)}{\partial\tau};$$

$$\hat{E}_0{}^*\theta(M,t)=\int_{\tau_1}^{t}\theta(M,t)\hat{E}_0(t,\tau)d\tau;\ \varepsilon(M,t)=\varepsilon\left(M,t\right)-\varepsilon_0;\ \gamma_i=\frac{\alpha_i}{\beta_i};$$

$K_0(\tau,t)=\frac{\partial}{\partial\tau}\left[a_0(\tau)+c_0(\tau,t)\right]$ – ядро ползучести, соответствующее однородной среде; $\varepsilon(M,t)=\varepsilon\left(M,t\right)-\varepsilon_0$; ε_0 – начальный коэффициент пористости; ξ – коэффициент бокового давления; $\varepsilon(t)$ – коэффициент пористости для исследуемого момента времени t; $a_0(M,t)=\frac{1}{E(M,t)}$ – коэффициент мгновенного уплотнения; $\theta(M,t)$ – сумма главных напряжений; n – размерность рассматриваемой задачи.

Выражение (1) дает возможность оценить влияние неоднородности на общее состояние уплотнения упругоползучего грунта и является определяющей зависимостью между коэффициентом пористости и суммой главных напряжений, т.е. оно является основным уравнением, описывающим состояния непрерывно-неоднородных упругоползучих грунтов.

Процесс уплотнения трехфазной земляной среды без учета вязких свойств скелета и переменности коэффициента фильтрации согласно [7] описывается следующим образом

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\beta_{cp}(1+\varepsilon_{cp})\frac{\partial p}{\partial t}=\kappa\gamma_B^{-1}(1+\varepsilon_{cp})\nabla^2 p, \quad (2)$$

где ∇^2 – оператор Лапласа; ε_{cp} – средний коэффициент пористости; β_{cp} и κ – коэффициент объемного сжатия и фильтрации; p – давление в поровой жидкости, γ_B – объемный вес воды.

Вместо $e(t)$ в (2) подставив (1), соотношение (2) приводим к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}+L(t)\frac{\partial p}{\partial t}-\alpha_H\eta(M)\left[A(t)\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}+B(t)\frac{\partial p}{\partial t}\right]=N(t)\cdot\left(\gamma_1+\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^2 p, \quad (3)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&L(t)=na(t)\left[a_0'(t)+a_1\gamma_1\varphi_0+\gamma_1 a_0(t)\right];\\
&N(t)=\kappa\gamma_B^{-1}a(t)(1+\varepsilon_{cp})\left[1+(n-1)\xi\right];\\
&A(t)=na(t)a_0(t);\\
&B(t)=na(t)\left[a_0'(t)+\gamma_H^{-1}a_1\varphi_0+\gamma_1 a_0(t)\right];\\
&a(t)=\left\{na_0(t)+\beta_{cp}(1+\varepsilon_{cp})\cdot\left[1+(n-1)\xi\right]\right\}^{-1}
\end{aligned}\right\}. \quad (4)$$

Для решения уравнения (3), помимо граничных условий имеем два начальных условия [1]:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{t=\tau_1}+R(\tau_1)p(\tau_1)+\alpha\eta(M)\begin{bmatrix}A(\tau_1)\left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{t=\tau_1}+R(\tau_1)\gamma^{-1}p(\tau_1)-\\-R(\tau_1)\gamma^{-1}(\theta^*+np^*)\end{bmatrix}=$$

$$=N(\tau_1)\nabla^2 p(\tau_1)+R(\tau)\cdot\left(\theta^*+np^*\right); \quad (5)$$

$$p(\tau_1)=\frac{1}{\omega_{cp}}\left(\frac{\theta^*}{n}+p^*\right). \quad (6)$$

где $R(\tau_1)=na(\tau_1)\cdot a_1\gamma_1\varphi_0$; $\frac{\theta^*}{n}+p^*$ – начальное распределение порового давления для двухфазной среды исследуемой задачи.

Таким образом, процесс уплотнения упругоползучих неоднородных грунтов математически будет описан дифференциальным уравнением вида (3) при начальных условиях (5), (6), т.е. вся задача сводится к определению решений уравнений (3) при соответствующих краевых условиях.

Для решения (3) при (4) – (6) обычно применяется метод возмущений, успешно используемый в теории упругости неоднородных тел [3]. Согласно этому методу вводится некоторый малый параметр γ:

$$\eta(M)=\gamma\eta_0(M)\,. \quad (7)$$

Здесь $\eta_0(M)$ – неоднородная функция, зависящая от координат.

Затем решение уравнения (3) ищется в виде:

$$P(M,t)=\sum_{m=0}^{\infty}P_m(M,t)\gamma^m . \qquad (8)$$

Выражения (7) и (8) подставим в (3), затем приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях γ. При этом получим

$$\frac{\partial^2 P_0}{\partial t^2}+L(t)\frac{\partial P_0}{\partial t}=N(t)\left(\gamma_1+\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^2 P_0; \qquad (9)$$

$$\frac{\partial^2 P_n}{\partial t^2}+L(t)\frac{\partial P_n}{\partial t}=N(t)\left(\gamma_1+\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^2 P_0-F_{n-1}(M,t), \qquad (10)$$

где

$$F_{n-1}(M,t)=\alpha_H\eta_0(M)\left[A(t)\frac{\partial^2 P_{n-1}}{\partial t^2}+B(t)\frac{\partial P_{n-1}}{\partial t}\right]. \qquad (11)$$

Начальными условиями для этих дифференциальных уравнений будут:

$$\left.\frac{\partial P_0}{\partial t}\right|_{t=\tau_1}+R(\tau_1)P_0(M,\tau_1)=N(\tau_1)\nabla^2 P_0(M,\tau_1)+R(\tau_1)\cdot\left(\theta^*+nP^*\right);$$

$$P_0(M,\tau_1)=\frac{1}{\omega_{cp}}\left(\frac{\theta^*}{n}+P^*\right); \qquad (12)$$

$$\left.\frac{\partial P_n}{\partial t}\right|_{t=\tau_1}+R(\tau_1)P_n(M,\tau_1)=N(\tau_1)\nabla^2 P_n(M,\tau_1)-\Phi_{n-1}(M,\tau_1);P_n(\tau_1)=0. \qquad (13)$$

Функция $\Phi_{n-1}(M,\tau_1)$, входящая в (13) имеет вид:

$$\Phi_{n-1}(M,\tau_1)=a\eta_0(M)\cdot\left[A(\tau_1)\frac{\partial P_{n-1}}{\partial t}\Bigg|_{t=\tau_1}+\gamma^{-1}R(\tau_1)P_{n-1}-R(\tau_1)\frac{\theta^*+nP^*}{n}\right] \qquad (14)$$

Итак, для решения задач механики уплотнения упругоползучих неоднородных грунтов требуется найти непрерывные функции $P_i(M,t)$, удовлетворяющие в области $\bar{\Omega}=\left\{M\in\bar{G};\ t\geq\tau_1\right\}$ системе линейных дифференциальных уравнений (9), (10) с начальными (12), (13) при (11), (14) и граничными условиями общего вида

$$\left.\begin{aligned}&\left[\alpha^0(M)\frac{\partial P_0(M,t)}{\partial s}+\beta^0(M)P_0(M,t)\right]\Bigg|_{M\in T}=\varphi^0(t),\\&\left[\alpha^{(i)}(M)\frac{\partial P_1(M,t)}{\partial s}+\beta^{(i)}(M)P_0(M,t)\right]\Bigg|_{M\in\Gamma}=0.\end{aligned}\right\}. \qquad (15)$$

Здесь G – конечная область, ограниченная замкнутой кусочно-гладкой поверхностью Γ; s – внешняя нормаль к Г.

$$\alpha^{(i)}\geq 0;\quad b^{(i)}\geq 0;\quad \alpha^0+\beta^0>0;\ a_0(\tau)>0,\quad C(\tau,t)>0,\ M\in\bar{G},\ \ t\geq\tau_1 .$$

В целом исследуемая задача относится к неоднородным задачам теории консолидации упругоползучих грунтов. Решение этой задачи, безусловно, предоставляет большие трудности. Однако знание собственных функций соответствующей однородной задаче позволяет решать и неоднородные.

Рассмотрим одномерную задачу теории консолидации многофазных неоднородных грунтов, обладающих свойством ползучести. Для этой задачи требуется определить давление в поровой жидкости $p(z,t)$, напряжение в скелете грунта $\sigma(z,t)$ и осадок уплотняемого слоя конечной мощности h.

Для данного случая вместо функции $\alpha^{(0)}(M)$ и $\varphi^{(0)}(t)$, входящие в выражение при $z=h$ имеем $\alpha^{(0)}(M)=0$, $\varphi^{(0)}(t)=0$, а при $z=0$ имеем $\beta^{(0)}(M)=0$ и $\varphi^{(0)}(t)=0$. Следовательно, $P_0(M,t)=P_0(z,t)=0$, а собственная функция представляется в виде:

$$\psi_j^{(0)}(M)=\psi_j^{(0)}(x_3)=\cos\frac{(2j+1)}{2h}z\,.$$

Тогда выражение $P_0(z,t)$ запишется следующим образом:

$$P_0(z,t)=\sum_{j=0}^{\infty}P_j^{(0)}(t)\cos\frac{(2j+1)\pi}{2h}z, \qquad (16)$$

где функция $P_j^{(0)}(t)$, для данного случая имеет вид:

$$P_j^{(0)}(t)=\frac{rA_{ij}}{\omega_0(r_{2j}-r_{1j})}\left[\begin{array}{l}\left(r_{2j}-N(\tau_1)\nu_j^2\right)\cdot e^{-r_{1j}(t-\tau_1)}+\\+\left(N(\tau_1)\nu_j^2-r_{1j}\right)\cdot e^{-r_{2j}(t-\tau_1)}\end{array}\right]. \qquad (17)$$

Определив и другие функции $P_j(z,t)$ распределение порового давления в неоднородном упруго-ползучем грунте можно представить в виде:

$$P(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\gamma^n P_j^{(n)}(t)\cos\frac{(2j+1)\pi}{2h}z. \qquad (18)$$

$$P_j^{(n)}(t)=\frac{1}{r_{2j}-r_{1j}}\left\{\begin{array}{l}f_{j_0}^{(n)}(\tau_1)\sum_{i=1}^{2}(-1)^{3-k}e^{-r_{k,j}(t-\tau_1)}+\\+\int_{\tau_1}^{t}f_j^{(n)}(\tau)\sum_{i=1}^{2}(-1)^{3-k}e^{-r_{k,j}(t-\tau_1)}d\tau\end{array}\right\}$$

При этом напряжение в скелете грунта вычисляется по формуле

$$\sigma(z,t)=q(z,t)-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}P_j^{(n)}(t)\cos\frac{(2j+1)\pi}{2h}z.$$

Для определения перемещения границ уплотняемого слоя воспользуемся известной формулой определения осадка:

$$S(t)=\int_0^h\frac{\varepsilon_0-\varepsilon(z,t)}{1+\varepsilon_0}dz\,.$$

Теперь рассмотрим решение краевой задачи (3)-(6) применительно к уплотнению слоя трехфазного упругоползучего грунта с водоупором на глубине h, ограниченном с боков водонепроницаемыми стенками, и находящимся под действием равномерно распределенной нагрузки q, приложенной на участке ($-a,a$) поверхности массива.

Расчетная формула, которая дает возможность вычислить давление в поровой жидкости, т.е.

$$P(x,y,t)=\sum_{\mathrm{n=o}}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^n V_{ik}^{(m)}(t)\cos\frac{j\pi}{\ell}x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2h}y\,. \qquad (19)$$

Величины $V_{ik}^{(0)}(t)$, $V_{ik}^{(m)}(t)$ в выражении (19) находятся из:

$$V_{ik}^{(m)}(t)=\frac{1}{r_{1jk}-r_{2jk}}\left\{\begin{array}{l}L_{jk}^{(m)}(\tau_1)\left[e^{-r_{2jk}(t-\tau_1)}-e^{-r_{1jk}(t-\tau_1)}\right]+\\+\int_{\tau_1}^{t}\Phi_{jk}^{(m)}(\tau)\left[e^{-r_{2jk}(t-\tau_1)}-e^{-r_{1jk}(t-\tau_1)}\right]d\tau\end{array}\right\}, \qquad (20)$$

$$L_{jk}^{(m)}(\tau_1) = -\frac{4\alpha_H}{\ell h}\int_0^{\ell}\int_0^{h}\left\{\begin{array}{l}\eta_0(x,y)\left[\begin{array}{l}A^{(2)}\,\dot{P}_{m-1}(x,y,\tau_1)\big|_{t=\tau_1} + \gamma_B^{-1}R^{(2)}(\tau_1)\times \\ \times P_{m-1}(x,y,\tau_1) - R^{(2)}(\tau_1)\times \\ \times\left[\theta^*(x,y,\tau_1) + 2P^*(x,y,\tau_1)\right]\end{array}\right]\times \\ \times\cos\frac{j\pi}{\ell}x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2h}y\end{array}\right\}dxdy,$$

$$\Phi_{jk}^{(m)}(\tau_1) = -\frac{4\alpha_H}{\ell h}\int_0^{\ell}\int_0^{h}\left\{\begin{array}{l}\eta_0(x,y)\left[A^{(2)}\ddot{P}_{m-1}(x,y,\tau) + B^{(2)}\dot{P}_{m-1}(x,y,\tau_1)\right]\times \\ \times\cos\frac{j\pi}{\ell}x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2h}y\end{array}\right\}dxdy \qquad (21)$$

$P_1(M,t), P_2(M,t), P_3(M,t), ..., P_j(M,t)$ – последующие решения задачи. Например, $P_0(x,y,t)$ имеет вид:

$$P_0(x,y,t) = \frac{r}{\omega_0'}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}V_{ijk}^{(0)}e^{-r_{ijk}(t-\tau_1)}\cos\frac{j\pi}{\ell}x\cos\frac{(2k+1)}{2h}y, \qquad (22)$$

где

$$V_{ijk}^{(0)} = (-1)^i G_{jk}\left[R^{(2)}(\tau_1)\cdot(1-\omega_0') + C_V^{(2)}\alpha_{jk}^{(2)} - r_{3-i,j,k}\right];\ 2V_{i0k}^{(0)} = \lim_{j\to\infty}V_{ijk}^{(0)}. \qquad (23)$$

Величина G_{jk}, входящая в выражение (10) вычисляется по формуле

$$G_{jk} = \frac{2(-1)^k(2k+1)\pi\sin\frac{j\pi a}{\ell}}{h^{(2)}\alpha_{jk}^{(2)}(r_{2jk} - r_{1jk})j\pi}.$$

r_{ijk} – корни квадратного алгебраического уравнения; $C_V^{(2)}$, $\omega_0^{/}$ Причем коэффициенты $A^{(2)}$, $B^{(2)}$, $R^{(2)}$, входящие в соотношения (19)-(21) вычисляются по

$$A^{(2)} = 2a^{(2)}a_0; \quad B^{(2)} = 2a^{(2)}\gamma_1(a_1 + a_0);$$

$$C_{2V} = K\gamma_D^{-1}a^{(2)}(1+\varepsilon_{cp}); \quad a^{(2)} = \left[2a_0 + \beta'(1+\varepsilon_{cp})\cdot(1+\xi)\right]^{-1} \qquad (22)$$

Выражение (22) включает в себя основные характеристики уплотняемого массива, и оно полностью отражает физико-механические свойства грунта.

Пользуясь соотношениями (19)-(22) определены давления в поровой жидкости. Поровое давление дает возможность находить сумму главных напряжений в скелете грунта, а также вертикальные перемещения верхней поверхности уплотняемого массива.

Анализ вычислений показывает, что давление в поровой жидкости для плоской задачи меньше, чем для одномерного случая. В то же время характер изменения кривых, как для порового давления, так и для осадка и напряжений в скелете грунта остаются такими же, как для одномерного уплотнения. Задачи теории уплотнения упругоползучих неоднородных грунтов в различных постановках также исследованы авторами данной работы [2-6].

Список литературы

1. Дасибеков А.Д., Юнусов А.А., Камбарова О.Б., Саржанова М.Ж., Такибаева Г.А. Уравнение консолидации упругоползучих грунтов // Сборник трудов международной научно-методической конференции: Актуальные проблемы образования, науки и производства – 2008 Казахстанского университета дружбы народов. – Шымкент, 2008. – Т.1. – С.133-138.

2. Дасибеков А., Юнусов А.А., Юнусова А.А. Двумерное уплотнение упругоползучих неоднородных грунтовых оснований // Успехи современного естествознания -2013.- №10. – С. 240-244.

3. Дасибеков А., Юнусов А.А., Юнусова А.А., Айашова А. Уплотнение наследственно стареющих неоднородных грунтовых оснований //Фундаментальные исследования. – 2013.- №8 (часть-2). – С. 323-331.

4. Дасибеков А., Юнусов А.А., Юнусова А.А.Расчет неоднородных упругих и упругоползучих грунтовых оснований при устройстве песчаной подушки //Международный журнал экспериментального образования. – 2013. – №8. – С. 139-145.

5. Расчет двухслойных упругоползучих круглых плит, лежащих на упругоползучем неоднородном оснований // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – № 2.

6. Дасибеков А., Юнусов А.А., Сайдуллаева Н.С., Юнусова А.А. Расчет элементов инженерных конструкций, лежащих на неоднородном грунтовом основании // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – № 3.

7. Флорин В.А. Основы механики грунтов. – М.: Госстройиздат, Т 2, 1961. – 543 с.