УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРУГИХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЕ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПЛОСКОЙ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ В ВИДЕ ФУНКЦИИ ХЕВИСАЙДА

Мусаев В.К.

МГМУ, Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Рассмотрена некоторая информация моделирования упругих волн напряжений в бесконечной полосе при воздействии в виде функции Хевисайда. Поставленная задача решается с помощью численного моделирования нестационарных динамических уравнений математической теории упругости. Отраженные волны растяжения от свободной поверхности бесконечной полосы накладываются на падающие сжимающие напряжения. Интерференция прямых и отраженных волн приводит к нулевому напряженному состоянию в бесконечной полосе при воздействии ступенчатой функции. Для решения двумерной нестационарной динамической задачи математической теории упругости с начальными и граничными условиями используется метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Применяется однородный алгоритм. С помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями приведена к линейной задаче Коши. Показаны компоненты нормальных напряжений в характерной области исследуемой задачи.

Ключевые слова: вычислительный эксперимент, нестационарные волны, численный метод, перемещение, скорость перемещений, ускорение, напряжение, теория упругости, краевая задача, задача с начальными условиями, задача Коши, методика, алгоритм, комплекс программ, однородный алгоритм, импульсное воздействие, функция Хевисайда, бесконечная полоса, отражения растягивающая волна, падающая сжимающая волна, интерференция волн, наложение волн напряжений

MODELING OF NON-STATIONARY ELASTIC WAVES OF STRESSES IN AN INFINITE STRIP UNDER THE INFLUENCE OF PLANE LONGITUDINAL WAVES AS A FUNCTION OF HEAVISIDE

Musayev V.K.

MSMU, Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Considered some of the information modeling of elastic waves of stresses in an infinite strip under the influence as a function of Heaviside. The problem is solved using numerical simulation of non-stationary dynamic equations of the mathematical theory of elasticity. The reflected tensile wave from the free surface of the endless band superimposed on the incident compressive stresses. The interference of direct and reflected waves results in a zero stress state in an infinite strip under the influence of a step function. For solving two-dimensional nonstationary dynamic problems of mathematical elasticity theory with initial and boundary conditions using the method of finite elements in displacements. The problem is solved by the method of end-to-end account, without allocation of breaks. Applies a uniform algorithm. Using the method of finite elements in displacements, a linear problem with initial and boundary conditions are given to the linear Cauchy problem. Shows the components of the normal stresses in the characteristic region of the investigated problem.

Keywords: computational experiment, transient waves, numerical method, displacement, velocity, displacement, acceleration, strain, theory of elasticity, boundary value problem, the problem with the initial conditions, the Cauchy problem, method, algorithm, software complex, homogeneous algorithm, pulse impact, the function of Heaviside, an infinite strip, a reflected tensile wave, the incident compressive wave, interference of waves, superposition of stress waves

О численном методе, алгоритме и комплексе программ моделирования волн напряжений

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости (рис. 1) имеют вид

$$\left\| \begin{matrix} \sigma_x, \tau_{xy} \\ \tau_{xy}, \sigma_y \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{matrix} \right\| = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\| \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\|, \ (x, y) \cdot \Gamma ,$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_{x} \\ \sigma_{y} \\ \tau_{xy} \end{vmatrix} = \rho \begin{vmatrix} C_{p}^{2}, & C_{p}^{2} - 2C_{s}^{2}, & 0 \\ C_{p}^{2} - 2C_{s}^{2}, & C_{p}^{2}, & 0 \\ 0, & 0, & C_{s}^{2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon_{x} \\ \varepsilon_{y} \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{x} \\ \varepsilon_{y} \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x}, & 0 \\ 0, & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix}, (x, y) \in (\Gamma \cup S), (1)$$

где σ_{x} , σ_{y} и τ_{xy} – компоненты тензора упругих напряжений; ε_{x} , ε_{y} и γ_{xy} – компоненты тензора упругих деформаций; *и* и *v* – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей ОХ и ОУ соответственно; ρ – плотность

материала; $C_p = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} - \text{скорость про$ $дольной упругой волны; } C_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} -$

МЕЖДУНАРОДНЫЙ ЖУРНАЛ ПРИКЛАДНЫХ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ № 12, 2015 скорость поперечной упругой волны; v -коэффициент Пуассона; E -модуль упругости; $S(S_1 \cup S_2) -$ граничный контур тела Г.

Систему (1) в области, занимаемой телом Г, следует интегрировать при начальных и граничных условиях.



Рис. 1. Некоторое тело Г в прямоугольной декартовой системе координат ХОУ

Принимая во внимание определение матриц и векторов для тела Г, записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\overline{H}\vec{\phi} + \overline{K}\vec{\phi} = \vec{R}, \, \vec{\phi}\big|_{t=0} = \vec{\phi}_0, \, \vec{\phi}\big|_{t=0} = \vec{\phi}_0, \, (2)$$

где \overline{H} – матрица инерции; \overline{K} – матрица жесткости; $\overline{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\overline{\Phi}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\overline{\Phi}$ – вектор узловых упругих ускорений; \overline{R} – вектор узловых упругих внешних сил.

Соотношение (2) система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями.

Для интегрирования уравнения (2) конечноэлементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду

$$\bar{H}\frac{d}{dt}\vec{\phi} + \bar{K}\vec{\phi} = \vec{R}, \frac{d}{dt}\vec{\phi} = \vec{\phi}.$$
 (3)

Интегрируя по временной координате соотношение (3) с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t \vec{H}^{-1} (-\vec{K} \vec{\Phi}_i + \vec{R}_i),$$

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t \vec{\Phi}_{i+1}.$$
 (4)

Шаг по временной переменной Δt определяем из следующего соотношения

$$\Delta t = k \frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i = 1, 2, 3, ..., r), \quad (5)$$

где Δl – длина стороны конечного элемента; г – общее число конечных элементов.

Результаты численного эксперимента показали, что при k = 0,5 обеспечивается устойчивость явной схемы.

Разработанная методика позволяет решать задачи о взаимодействии сложных деформируемых тел с волновыми нагрузками. С помощью полученных разработок можно определять волны напряжений в деформируемых телах. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать сложные задачи при нестационарных волновых воздействиях. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90. Исследуемая область разбивается по пространственным переменным на треугольные конечные элементы с тремя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений и на прямоугольные конечные элементы с четырьмя узловыми точками с билинейной аппроксимацией упругих перемещений. По временной переменной исследуемая область разбивается на линейные конечные элементы с двумя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений.

Решение задачи о воздействии плоской продольной упругой волны в виде функции Хевисайда на бесконечную полосу

Некоторая информация о численном моделировании нестационарных волн напряжений в твердых деформируемых областях приведена в следующих работах [1–10].



Рис. 2. Постановка задачи о стоячих волнах в бесконечной полосе

INTERNATIONAL JOURNAL OF APPLIED AND FUNDAMENTAL RESEARCH № 12, 2015 В работах [1–2, 4–6, 8, 10] приведена некоторая информация о физической достоверности и математической точности моделирования нестационарных волн напряжений в деформируемых телах с помощью рассматриваемого численного метода, алгоритма и комплекса программ.

Рассмотрим задачу о воздействии плоской продольной упругой волны в виде ступенчатого импульса (функция Хевисайда) на бесконечную полосу.

Расчеты проводились при следующих единицах измерения: килограмм-сила (кгс); сантиметр (см); секунда (с). Для перехода в другие единицы измерения было принято следующее допущение: 1 кгс/см² ≈ 0,1 МПа.



Рис. 3. Нормальное напряжение $\overline{\sigma}_x$ во времени $0 \le n \le 100$ в точке B1



Рис. 4. Нормальное напряжение $\overline{\sigma}_{x}$ во времени $0 \le n \le 500$ в точке Bl



Рис. 5. Нормальное напряжение $\overline{\sigma}_{s}$ во времени $0 \le n \le 1990$ в точке BI



Рис. 6. Нормальное напряжение $\overline{\sigma}_y$ во времени $0 \le n \le 100$ в точке BI



Рис. 7. *Нормальное напряжение* $\overline{\sigma}_{y}$ *во времени* $0 \le n \le 500$ в точке BI'

МЕЖДУНАРОДНЫЙ ЖУРНАЛ ПРИКЛАДНЫХ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ № 12, 2015 PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES



Рис. 8. Нормальное напряжение $\overline{\sigma}_{v}$ во времени $0 \le n \le 1990$ в точке BI

На границе пластинки AB (рис. 2) приложено нормальное напряжение σ_y , которое при $0 \le n \le 3$ ($n = t / \Delta t$) изменяется линейно от 0 до P, а при $n \ge 3$ равно P ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = -0,1$ МПа ($-1 \ \kappa rc/cm^2$)).

Граничные условия для контуров BC и AD при t > 0 $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контуров BC и AD не доходят до исследуемых точек. Контур CD свободен от нагрузок.

Исследуемая расчетная область имеет 4002 узловые точки. Решается система уравнений из 16008 неизвестных.

Для примера на рис. 3–5 представлено изменение нормального напряжения $\overline{\sigma}_x$ ($\overline{\sigma}_x = \sigma_x / |\sigma_0|$) во времени n в точке B1. Для примера на рис. 6–8 представлено изменение нормального напряжения $\overline{\sigma}_y$ ($\overline{\sigma}_y = \sigma_y / |\sigma_0|$) во времени n в точке B1.

Получены нормальные напряжения в характерной области бесконечной полосы. Отраженные растягивающие волны от свободной поверхности бесконечной полосы накладываются на сжимающие волны от импульса. Интерференция прямых и отраженных волн приводит к нулевому напряженному состоянию в бесконечной полосе при воздействии ступенчатой функции.

Список литературы

 Мусаев В.К. Численное моделирование динамического напряженного состояния сооружений уравнениями двумерной теории упругости и пластичности. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 01.02.04. – М.: Совинтервод, 1993. – 46 с.

2. Мусаев В.К. Математическое моделирование упругих волн напряжений в сложных деформируемых телах // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 1. – С. 62–76.

3. Мусаев В.К. Об оценке достоверности и точности численного решения нестационарных динамических задач // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 3. – С. 48–60.

4. Мусаев В.К. Оценка достоверности и точности результатов вычислительного эксперимента при решении задач нестационарной волновой теории упругости // Научный журнал проблем комплексной безопасности. – 2009. – № 1. – С. 55–80.

5. Musayev V.K. Modeling of non-stationary of stress waves in solid deformable bodies complex area // International Journal Of Applied And Fundamental Research. $-2014. - N \ge 2$; URL: www.science-sd.com/457-24639.

 Мусаев В.К. О достоверности результатов математического моделирования нестационарных волн напряжений в объектах сложной формы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 3. – С. 71–76.

7. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11. – С. 10–14.

 Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 12 (1). – С. 28–32.

9. Мусаев В.К. Математическое моделирование поверхностных волн напряжений в задаче Лэмба при воздействии в виде дельта функции // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 2 (часть 1). – С. 25–30.

10. Musayev V.K. Estimation of accuracy of the results of numerical simulation of unsteady wave of the stress in deformable objects of complex shape // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2015. – Volume 11, Issue 1. – P. 135–146.