

УДК 534

**ЗАДАЧА СИНТЕЗА АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ
В МНОГОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ****Полянина А.С.***Камышинский технологический институт (филиал) ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный технический университет», Камышин, e-mail: science@kti.ru*

В статье рассматривается методика встраивания генераторов асимптотически устойчивых траекторий с участками, близкими к прямолинейным, в многомерные объекты управления. При этом обеспечивается устойчивость движения всей системы в целом и учитываются нелинейные свойства многомерного объекта управления произвольной структуры. Движение управляемой системы в этом случае будет описываться уравнениями объекта управления, уравнениями генератора асимптотически устойчивых траекторий и уравнениями связей. Уравнения объекта управления имеют форму дифференциально-алгебраических уравнений. Построены системы управления, в которых уравнения связей генератора программных траекторий с объектом управления представлены в виде голономных связей. Функция, задающая программное движение, является аналитической в пространстве состояний системы управления, асимптотически устойчивой и близка к программной траектории.

Ключевые слова: автоколебания, устойчивость, динамическая система**PROBLEM OF SYNTHESIS OF THE SELF-OSCILLATORY MODES
IN MULTIVARIATE DYNAMIC SYSTEMS****Polyanina A.S.***Kamyshin Technological Institute (branch of) State Educational Institution
of Higher Education Volgograd State Technical University, Kamyshin, e-mail: science@kti.ru*

In the article the procedure of embedding of generators of asymptotically stable trajectories with the sites close to rectilinear, in multivariate objects of control is considered. Thus stability of movement of all system as a whole is provided and nonlinear properties of multivariate object of management of any structure are considered. The movement of the controlled system in this case will be described by the equations of control object, by the equations of generator of asymptotically stable and by the equations of connections. Equations of control object have a form of differentially-algebraic equations. Control systems in which the equations of connections of the generator of program trajectories with the object of control are presented as holonomic connections are constructed. The function setting the program movement is analytical in space of conditions of a control system, asymptotically stable and is close to a program trajectory.

Keywords: self-oscillations, stability, dynamic system

Существенный интерес в динамике машин представляют методы синтеза движений, обеспечивающих устойчивость системы, как в точке, так и на замкнутых траекториях различного вида.

Задача управляемости линейной системы в точке в смысле перевода ее из произвольного положения в нулевое решается в известной теореме Калмана об управляемости. Для нелинейных задач универсальных методов синтеза и анализа нелинейных систем не существует.

Создание методов синтеза управляемых режимов, обеспечивающих устойчивое движение по замкнутым траекториям с участками, близкими к прямолинейным, для многомерных систем является актуальным.

Рассмотрим математическую модель динамической системы, движение которой описывается уравнениями объекта управления, уравнениями генератора асимптотически устойчивых траекторий с участками, близкими к прямолинейным, и уравнениями связей.

Уравнения объекта управления имеют форму дифференциально-алгебраических уравнений [1]. Такая форма уравнений позволяет рассматривать динамику объектов различного вида – механических, электромеханических, гидромеханических и т.д. Для управляемых машин (роботов, манипуляторов) запись уравнения движения в данной форме позволяет решать задачу синтеза управляемого движения многомерных пространственных механических систем [4]. При решении задачи синтеза задается функция, описывающая программное движение отдельных точек системы. Для улучшения качества управления необходима разработка методов, в которых такая функция обладает следующими свойствами: является 1) аналитической в пространстве состояний системы, 2) была бы близка к программной траектории и 3) асимптотически устойчивой.

Движение некоторых точек механической системы произвольной структуры по заданным траекториям можно записать в виде системы уравнений вида

$$\begin{cases} M\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t), \quad \ddot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{f}_0^*(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*), \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \Phi(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*) = \mathbf{0}, \end{cases}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор обобщенных координат управляемой системы (объекта управления), $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)^T$ – вектор обобщенных координат генератора системы, $\mathbf{M}$ – матрица инерции объекта управления, векторы $\mathbf{f}_0(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ – внутренних сил объекта управления, $\mathbf{f}_0^*(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*)$ – пра-

вых частей генератора заданных траекторий, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ – геометрических связей внутри объекта управления, Φ – связей между генератором и объектом управления (в общем случае не голономных, неинтегрируемых связей).

С учетом множителей Лагранжа и после двукратного дифференцирования уравнений связи, что необходимо для численного интегрирования, систему можно записать в виде

$$\begin{cases} (\mathbf{M} + \mathbf{p}^{*T} \Phi_{\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}}^T) \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{p}^{*T} \Phi_{\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}}^T \ddot{\mathbf{x}}^* + \Phi_{\dot{\mathbf{x}}}^T \dot{\mathbf{p}}^* - \mathbf{G}_x^T \mathbf{p} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*, t), \\ \mathbf{p}^{*T} \Phi_{\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}}^T \ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{E} + \mathbf{p}^{*T} \Phi_{\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}}^T) \ddot{\mathbf{x}}^* + \Phi_{\dot{\mathbf{x}}}^T \dot{\mathbf{p}}^* = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*), \\ \mathbf{G}_x \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \quad \Phi_x \ddot{\mathbf{x}} + \Phi_{\dot{\mathbf{x}}} \ddot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{q}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*), \end{cases}$$

где матрицы $\mathbf{G}_x$ – переменных коэффициентов связей внутри объекта управления, $\Phi_x, \Phi_{\dot{\mathbf{x}}}, \Phi_{\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}}^T, \Phi_{\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}}^T, \Phi_{\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}}^T, \Phi_{\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}}^T$ – переменных коэффициентов при множителях Лагранжа и их производных, векторы $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*, t)$, $\mathbf{f}^*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*)$ – правых частей уравнения объекта управления и уравнения генератора; $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, $\mathbf{q}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*)$ – правых частей уравнений связей, $\mathbf{p}$ – множителей Лагранжа, соответствующий связям внутри объекта управления, $\mathbf{p}^*$ – множителей Лагранжа, соответствующий связям между объектом управления и генератором траекторий.

Уравнения генератора программной траектории и уравнения связей могут иметь различный вид. В зависимости от этого можно выделить несколько случаев задания управляемого движения. Рассмотрим эти случаи.

1. Уравнения генератора записываются в виде дифференциальных уравнений второго порядка, и программная траектория определяется решением этих уравнений. В этом случае уравнения управляемой системы имеют вид

$$\begin{cases} M\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t), \\ \ddot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*), \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \\ \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (1)$$

$\mathbf{g}(\mathbf{x})$, $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*)$ – векторы связей. Уравнения связей для этого случая задаются в виде равенства соответствующих координат (голономные связи). Для замыкания уравнений системы (1) введем множители Лагранжа с помощью соответствующих уравнений Эйлера для условия экстремума функционала, тогда система (1) запишется в виде

$$\begin{cases} M\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{D}^T \mathbf{p} - \Phi_x^T \mathbf{p}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t), \\ \ddot{\mathbf{x}}^* - \Phi_{\dot{\mathbf{x}}}^T \mathbf{p}^* = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*), \\ \mathbf{D}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \\ \Phi_{\dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{x}} + \Phi_{\dot{\mathbf{x}}} \ddot{\mathbf{x}}^* = \varphi(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*), \end{cases} \quad (2)$$

где $\mathbf{p}^*$ – вектор множителей Лагранжа, соответствующих связям с заданными программными траекториями; Φ_x^T – матрицы переменных коэффициентов связей точек; $\varphi(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*)$ – вектор правых частей уравнений связей после двукратного дифференцирования.

В качестве примера можно рассмотреть систему, где масса m принуждается двигаться по траектории, задаваемой гармоническим осциллятором. Уравнения (1) будут иметь вид

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = 0, \\ \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

А уравнения (2) –

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 - p^* = 0, \\ \ddot{x}_2 + p^* = -\omega^2 x_2, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Такие системы обычно решаются с помощью двукратного дифференцирования уравнения связи [1]. После чего ее можно разрешить относительно старших производных и множителя Лагранжа:

$$\begin{cases} p^* = m\ddot{x}_2, \\ \ddot{x}_2 = -\frac{\omega^2 x_2}{1+m}, \\ \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2. \end{cases} \quad (5)$$

При любых значениях $m \neq 0$ управляемое движение x_1 будет отличаться от программного движения x_2 . Указанного несоответствия можно избежать, умножив обе части второго уравнения системы (3) на некоторый параметр α .

Тогда система (5) примет вид

$$\begin{cases} p^* = m\ddot{x}_2, \\ \ddot{x}_2 = -\frac{\alpha\omega^2 x_2}{\alpha + m}, \\ \dot{x}_1 = \dot{x}_2. \end{cases}$$

Очевидно, при достаточно больших значениях величины α решение уравнения будет стремиться к заданной траектории: координата x_1 стремится к координате x_2 .

Уравнения генератора замкнутых траекторий сложной формы в виде второго уравнения системы (1) выписать сложно. В работах [2, 3] были описаны генераторы автоколебаний в форме дифференциальных уравнений первого порядка. Рассмотрим возможность включения

в управляемую систему таких уравнений генераторов.

2. Для согласования уравнений связей, т.е. чтобы уравнения связей оставались голономными или интегрируемыми неголономными, целесообразно генератор записывать в виде

$$\ddot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}^*).$$

Для указанного типа связей задание траекторий генератора в форме $\ddot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{f}^*(\dot{\mathbf{x}}^*)$ обеспечивает непрерывность функций, описывающих программную траекторию движения. Тогда уравнения связей с объектом управления можно представить

$$\Phi(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}^*) = \mathbf{0}.$$

В этом случае уравнения управляемой системы будут иметь вид

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t), \\ \ddot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*), \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \Phi(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}^*) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (6)$$

Уравнения Эйлера для системы (6) запишутся в виде

$$\begin{cases} (\mathbf{M} + \mathbf{p}^{*T}(\Phi_{\dot{\mathbf{x}}})_{\dot{\mathbf{x}}})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{p}^{*T}(\Phi_{\dot{\mathbf{x}}})_{\dot{\mathbf{x}}^*}\ddot{\mathbf{x}}^* - \mathbf{D}^T \mathbf{p} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t), \\ (\mathbf{E} + \mathbf{p}^*(\Phi_{\dot{\mathbf{x}}^*})_{\dot{\mathbf{x}}^*})\ddot{\mathbf{x}}^* + \mathbf{p}^*(\Phi_{\dot{\mathbf{x}}^*})_{\dot{\mathbf{x}}} \ddot{\mathbf{x}} + \Phi_{\dot{\mathbf{x}}^*}^T \dot{\mathbf{p}}^* = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*), \\ \mathbf{D}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \Phi_{\dot{\mathbf{x}}} \ddot{\mathbf{x}} + \Phi_{\dot{\mathbf{x}}^*} \ddot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (7)$$

В частности, примером системы (6) в случае движения массы m по заданной траектории является система

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = 0, \\ \alpha\ddot{x}_2 = \alpha f_1(\dot{x}_2, \dot{x}_3), \\ \ddot{x}_3 = f_2(\dot{x}_2, \dot{x}_3), \\ \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(\dot{x}_2, \dot{x}_3) &= \pm \alpha_3 \dot{x}_3^{2m-1} + \beta_1 \dot{x}_2 + \beta_{2,1} \dot{x}_2^{2m+1} + \beta_{3,1} \dot{x}_3^{2m} \dot{x}_2, \\ f_2(\dot{x}_2, \dot{x}_3) &= \mp \alpha_2 \dot{x}_2^{2m-1} + \beta_2 \dot{x}_3 + \beta_{2,2} \dot{x}_3^{2m+1} + \beta_{3,2} \dot{x}_2^{2m} \dot{x}_3; \end{aligned} \quad (9)$$

коэффициенты при переменных в (9) удовлетворяют соотношениям, полученным в работе [2]; а для системы (7) –

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \dot{p}^* = 0, \\ \alpha\ddot{x}_2 - \dot{p}^* = \alpha f_1(\dot{x}_2, \dot{x}_3), \\ \ddot{x}_3 = f_2(\dot{x}_2, \dot{x}_3), \\ \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Для сложных траекторий (9) предложенный в работе [2, 3] метод синтеза обеспечит непрерывность функций, описывающих программную траекторию, и асимптотическую устойчивость движения точки по заданному предельному циклу.

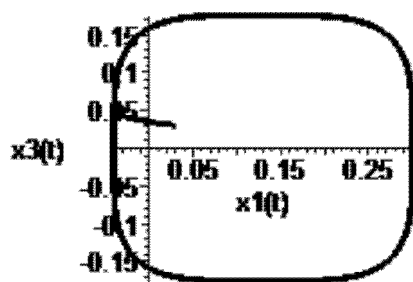


Рис. 1. Предельный цикл при $\alpha = 1$

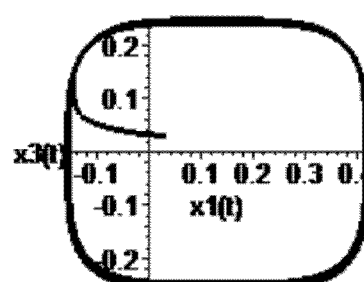


Рис. 2. Предельный цикл при $\alpha = 100$

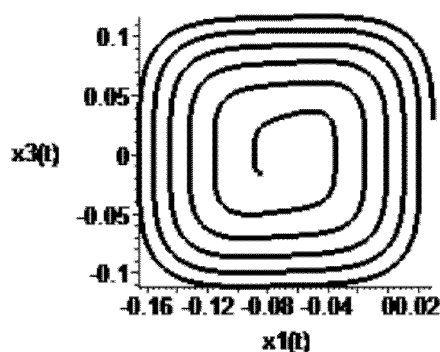


Рис. 3. Стабилизация в точку при $\alpha = 1$

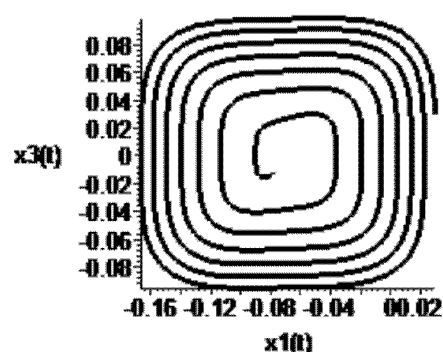


Рис. 4. Стабилизация в точку при $\alpha = 100$

Разрешив относительно старших производных и множителя Лагранжа систему (10), получим

$$\begin{cases} \dot{p}^* = -m\ddot{x}_2, \\ \ddot{x}_2 = \frac{\alpha f_1(\dot{x}_2, \dot{x}_3)}{\alpha + m}, \\ \ddot{x}_3 = f_2(\dot{x}_2, \dot{x}_3), \\ \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2. \end{cases}$$

На рис. 1–4 представлены устойчивые предельные циклы и стабилизация в точку системы управления в подпространстве X_1X_3 в случае различных значений параметра α .

При увеличении α интегральная кривая выходит на заданный устойчивый режим; скорость $\dot{x}_1$ стремится к скорости $\dot{x}_2$.

Таким образом, разработанная методика сопряжения дифференциальных урав-

нений генераторов нелинейных колебаний с дифференциально-алгебраическими уравнениями объекта управления позволяет реализовывать автоколебательные режимы движения звеньев объекта управления по замкнутым траекториям с участками, близкими к прямолинейным.

Список литературы

1. Банах Л.Я. Условия разбиения системы дифференциально-алгебраических уравнений на слабосвязанные подсистемы / Л.Я. Банах, А.С. Горобцов, О.К. Чесноков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – т. 46, № 12. – С. 2225–2229.
2. Горобцов А.С. Синтез интегральных поверхностей Ламе и стабилизация колебаний в их окрестностях / А.С. Горобцов, Е.Н. Рыжов, А.С. Чурзина // Динамика сложных систем. – 2009. – Т. 3, № 1. – С. 59–62.
3. Горобцов А.С. Многофункциональные генераторы автоколебаний / А.С. Горобцов, Е.Н. Рыжов, А.С. Чурзина // Известия ВолгГТУ. – 2011. – вып. 11, № 9. – С. 19–22.
4. Shabana A.A. Dynamics of Multibody Systems / A.A. Shabana // New York, NY, Cambridge University Press, 2005.