

УДК 532.1-3

ВРАЩЕНИЕ ВЗВЕШЕННОГО ШАРА В НЕОДНОРОДНОМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

Павлов А.М.

РГП на ПХВ «Восточно-Казахстанский государственный университет имени С. Аманжолова» Министерства образования и науки Республики Казахстан, Усть-Каменогорск, e-mail: ampavlov@mail.ru

Задача, рассмотренная в статье, инициирована статьей Лесина В.И. и Лесина С.В. «Кластерная модель вязкости жидкости» [1]. В статье [1] вязкость жидкости увязывается с вращательным движением кластеров и по распадам в определенный момент времени. При этом считается, что угловая скорость вращения кластеров равна градиенту скорости. В данной статье решается задача о вращении шара, движущегося вместе с жидкостью, когда поток неоднородный. Невозмущенный поток в системе отсчета, связанной с центром шара, описывается уравнением: $\vartheta = Ax_j$, где ось Ox направлена от центра шара перпендикулярно скорости жидкости. Разыскивая решение в виде трех слагаемых: невозмущенная скорость ϑ_0 , слагаемое, представляющее градиент скалярной функции и слагаемое, представляющее собой вектор, убывающий на бесконечности, задачу удалось свести к решению уравнений Лапласа и Пуассона. Найденное решение поставленной задачи показывает, что угловая скорость вращения шара равна половине градиента скорости жидкости.

Ключевые слова: шар, вращение, возмущения, прилипание, компоненты скорости

ROTATION OF SUSPENDED BED IN AN INHOMOGENEOUS FLUID FLOW

Pavlov A.M.

East Kazakhstan State University n.a. S. Amanzholov, Ust-Kamenogorsk, e-mail: ampavlov@mail.ru

The problem considered in this article, is initiated by article V.I. Lesin and S.V. Yassin «A cluster model viscosity fluid» [1]. The article [1] linked to the viscosity of the fluid rotational motion of the cluster and decays at a time. It is assumed that the angular velocity of rotation of clusters is equal to the velocity gradient. In this paper we solve the problem of the rotation of the ball, moving with the fluid when the flow heterogeneity. Undisturbed flow in the reference frame associated with the center of the ball, described by the equation: $\vartheta = Ax_j$, where the x-axis is directed from the center of the sphere perpendicular to the liquid velocity ϑ_0 . While searching a solution in the form of three components: the unperturbed velocity, term, representing the gradient of the scalar functions, and term, which represents vector decreases at infinity. The problem reduces to the solution of the Laplace and Poisson. The obtained solution of the problem shows that the angular velocity of rotation of the ball is equal to half the velocity gradient.

Keywords: ball, rotation, disturbance, sticking, velocity components

Пусть шар радиуса a находится в неоднородном потоке жидкости и движется вместе с жидкостью. Поскольку шар увлечается жидкостью, то можно считать, что в системе отсчета центра шара скорость этого центра равна нулю. Тогда с одной стороны шара поток жидкости направлен вдоль оси y , а с другой стороны – против оси y (рис. 1). Вследствие малых размеров шара можно считать градиент скорости в масштабах шара малым.

Пусть градиент скорости равен $\frac{d\vartheta}{dx} = A = const$ вдали от шара. В плоскости yoz скорость частиц жидкости равна нулю. В этом случае невозмущенный поток можно представить равенством:

$$\overline{\vartheta} = Ax_j. \quad (1)$$

Следовательно, поле скоростей на бесконечности в сферической системе координат представляется следующим образом:

$$\vartheta_{\theta_0} = Ar \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi;$$

$$\vartheta_{\varphi_0} = Ar \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi; \quad (2)$$

$$\vartheta_{\varphi_0} = Ar \sin \theta \cos^2 \varphi,$$

где угол φ отсчитывается от оси x , а угол θ – от оси z .

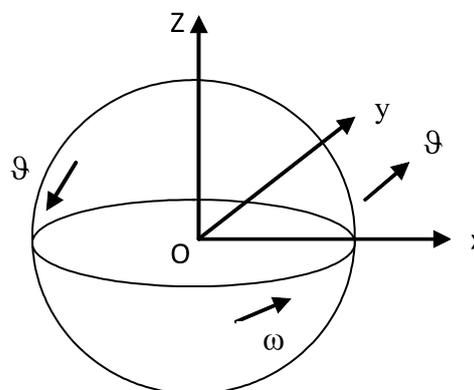


Рис. 1. Картина течения жидкости вокруг шара

Движение жидкости вокруг шара считается стационарным. Тогда уравнения дви-

жения жидкости с учетом малости скоростей будут иметь вид:

$$\text{grad } P = \mu \nabla^2 \bar{\mathfrak{G}}; \quad (3)$$

$$\text{div } \bar{\mathfrak{G}} = 0,$$

где P – давление в жидкости, μ – коэффициент вязкости жидкости.

Поле скоростей будем искать в виде:

$$\bar{\mathfrak{G}} = \bar{\mathfrak{G}}_0 + \text{grad } \omega + \bar{U}. \quad (4)$$

Здесь $\bar{\mathfrak{G}}_0$ – скорость на бесконечности, скалярная функция ω и \bar{U} описывают возмущения, вносимые шаром, в движение жидкости. Так как $\text{div } \bar{\mathfrak{G}} = 0$ и $\text{div } \bar{\mathfrak{G}}_0 = 0$, то

$$\nabla^2 \omega + \text{div } \bar{U} = 0.$$

Далее, поскольку

$$\text{grad } \frac{P}{\mu} = \nabla^2 \bar{U}_0 + \text{grad}(\nabla^2 \omega) + \nabla^2 \bar{U}$$

и $\nabla^2 \bar{\mathfrak{G}}_0 = 0$, а также положим $\nabla^2 \bar{U} = 0$, то $P = -\mu \text{div } \bar{U}$ и $\nabla^2 \omega = -\text{div } \bar{U}$.

Таким образом, задача свелась к решению уравнений:

$$\nabla^2 \bar{U} = 0; \quad (5)$$

$$\nabla^2 \omega = -\text{div } \bar{U}. \quad (6)$$

Граничные условия вытекают из предположения, что жидкость прилипает к поверхности шара, т.е.

$$\mathfrak{G}_r = 0; \mathfrak{G}_\theta = 0; \mathfrak{G}_\varphi = \omega a \sin \theta. \quad (7)$$

Кроме того, на бесконечности возмущения должны исчезать:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \omega = 0; \lim_{r \rightarrow \infty} \bar{U} = 0.$$

Поскольку решается внешняя задача, то общее решение уравнения Лапласа можно записать в виде [2]:

$$U_k = \sum \left[\frac{A_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) + \sum \frac{P_{mn}(\cos \theta)}{r^{n+1}} (A_{mn} \cos m\varphi + B_{mn} \sin m\varphi) \right].$$

Учитывая зависимость \mathfrak{G}_r и \mathfrak{G}_θ от углов θ и φ , следует положить: $r = 2$, $m = 2$, т.е.

$$U_r = \frac{P_{22}}{r^3} (A_{11} \cos 2\varphi + B_{11} \sin 2\varphi);$$

$$U_\theta = \frac{P_{22}}{r^3} (A_{22} \cos 2\varphi + B_{22} \sin 2\varphi);$$

$$U_\varphi = \frac{P_{22}}{r^3} (A_{33} \cos 2\varphi + B_{33} \sin 2\varphi),$$

где P_{22} – присоединенный полином Лежандра.

Найдем $\text{div } U$. Учитывая, что

$$\text{div } \bar{U} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta U_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta U_\theta) + \frac{\partial (r U_\varphi)}{\partial \varphi} \right],$$

получили:

$$\begin{aligned} \text{div } \bar{U} = & -3r^{-4} \sin^2 \theta (A_{11} \cos 2\varphi + B_{11} \sin 2\varphi) + \\ & + 9r^{-4} \sin \theta \cos \theta (A_{22} \cos 2\varphi + B_{22} \sin 2\varphi) + 6r^{-4} \sin \theta (-A_{33} \sin 2\varphi + B_{33} \cos 2\varphi). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь учтено, что $P_{22} = 3 \sin^2 \theta$.

Теперь необходимо решить уравнение (6) с учетом (8). Это есть уравнение Пуассона, типа $\nabla^2 \varphi = -f$, решение которого хорошо известно

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{f}{r'} dV.$$

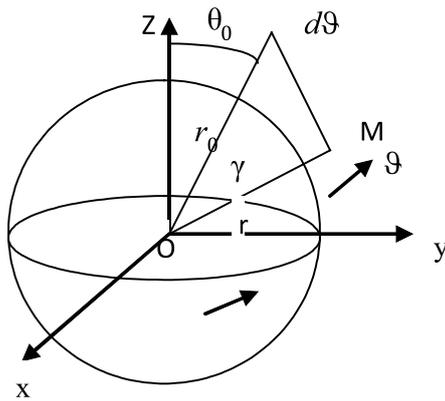


Рис. 2. Расположение точки M и объема dV

Следовательно, решение уравнения (6) находится таким же образом:

$$\frac{1}{r'} = \sum_n \frac{r^n}{r_0^{n+1}} \left[P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta_0) + 2 \sum_k \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_{nk}(\cos\theta)P_{nk}(\cos\theta_0)\cos k(\varphi - \varphi_0) \right].$$

Подставляя $\text{div}\bar{U}u \frac{1}{r'}$ в уравнение (6), будем иметь:

$$\begin{aligned} \omega = & -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [3\sin^2\theta r_0^{-4} (A_{11} \cos 2\varphi_0 + B_{11} \sin 2\varphi) - \\ & -9r_0^{-4} \sin\theta_0 \cos\theta_0 (A_{22} \cos 2\varphi_0 + B_{22} \sin 2\varphi_0) + \\ & +6r_0^{-4} \sin\theta_0 (A_{33} \sin 2\varphi_0 - B_{33} \cos 2\varphi_0)] \cdot \frac{r^2}{r_0^3} \end{aligned}$$

$$\left[\sum_n P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta_0) + 2 \sum_k \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_{nk}(\cos\theta)P_{nk}(\cos\theta_0)\cos k(\varphi - \varphi_0) \right] dV.$$

Вследствие ортогональности тригонометрических функций интегралы по φ не равны нулю только при $k = 2$. А при $k = 2$ имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi \cos^2 2\varphi_0 d\varphi_0 &= \pi \cos 2\varphi; \quad \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi \sin^2 2\varphi_0 d\varphi_0 = \pi \sin 2\varphi; \\ \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi \sin 2\varphi_0 \cos 2\varphi_0 d\varphi_0 &= 0; \quad \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi \sin 2\varphi_0 \cos 2\varphi_0 d\varphi_0 = 0. \end{aligned}$$

После взятия интегралов по φ получаем:

$$\begin{aligned} \omega = & -\frac{1}{48} \int_0^\infty \int_r^\infty \left[\frac{3\sin^2\theta_0}{r_0^4} (A_{11} \cos 2\varphi + B_{11} \sin 2\varphi) + \frac{6\sin\theta_0}{r_0^4} (A_{33} \sin 2\varphi - B_{33} \cos 2\varphi) \right] \frac{r^2}{r_0^3} \times \\ & \times 2\sin^2\theta \sin^2\theta_0 r_0^2 \sin\theta_0 d\theta_0 dr_0. \end{aligned}$$

Интегрирование по θ дает:

$$\sin^2\theta \int_0^\pi \sin^5\theta_0 d\theta_0 = \frac{16}{15} \sin^2\theta; \quad \sin^2\theta \int_0^\pi \sin^4\theta_0 d\theta_0 = \frac{3\pi}{8} \sin^2\theta.$$

$$\omega = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{div}\bar{U}}{r'} dV, \tag{9}$$

где r' – есть расстояние от объема dV до точки наблюдения M (рис. 2). Объем dV имеет координаты $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$, а точка M определяется координатами (r, θ, φ) . Следовательно, $r' = \sqrt{r_0^2 - 2r_0r \cos\gamma + r^2}$, где γ – угол между r_0 и r .

Следовательно, $r' = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0r \cos\gamma}$.

Представим $\frac{1}{r'}$ в виде ряда по полиномам Лежандра:

$$\frac{1}{r'} = \sum \frac{r^n}{r_0^{n+1}} P_n(\sin\gamma).$$

Учитывая, что угол γ зависит от координат т. M и объема dV и теорему сложения для полиномов Лежандра, получаем:

Для интегрирования по r точку M выбираем достаточно близко к шару, поскольку возмущения наибольшие вблизи шара. Поэтому и проводится интегрирование по r_0 от r до бесконечности. Тогда

$$r^2 \int_r^\infty \frac{dr_0}{r_0^5} = -\frac{r^2}{4r_0^4} \Big|_r^\infty = \frac{1}{4r^2}.$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$\omega = -\frac{3\sin^2\theta}{4r^2} \left[\frac{1}{5}(A_{11} \cos 2\varphi + B_{11} \sin 2\varphi) + \frac{9\pi}{64}(A_{33} \sin 2\varphi - B_{33} \cos 2\varphi) \right]. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (4) и используя граничные условия (7), получаем:

$$B_{11} = -\frac{Aa^4}{3}; A_{33} = \frac{128Aa^4}{45\pi}; A_{11} = A_{22} = B_{22} = B_{33} = 0. \quad (11)$$

Отсюда для проекций вектора скорости получаем следующие выражения:

$$U_r = Ar \left(1 - \frac{a^4}{r^4} \right) \sin^2\theta \sin\varphi \cos\varphi; U_\theta = Ar \left(1 - \frac{a^4}{r^4} \right) \sin\theta \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi;$$

$$U_\varphi = 0,5Ar \left(1 - \frac{a^4}{r^4} \right) \sin\theta \cos 2\varphi + 0,5Ar \sin\theta \text{ или}$$

$$U_\varphi = Ar \left(1 - \frac{a^4}{r^4} \right) \sin\theta \cos^2\varphi + 0,5Aa^4 r^{-3} \sin\theta. \quad (12)$$

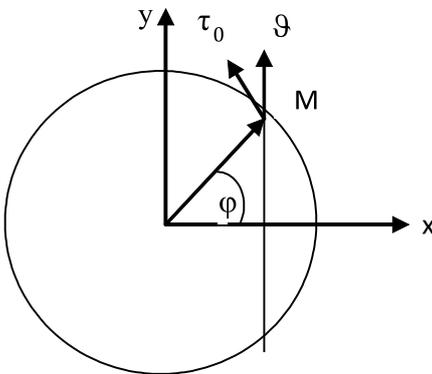


Рис. 3. К определению силы, вращающей шар

Поскольку при $r = a$ $U_\varphi = \omega a \sin\theta$, то из (12) следует, что угловая скорость вращения шара должна быть $0,5A$:

$$\omega = 0,5A = 0,5 \frac{dU}{dx}. \quad (13)$$

В статье [1] считается, что $\omega = \frac{\vartheta}{R} = \frac{d\vartheta}{dx}$.

Нетрудно понять, что угловая скорость шара была бы такой, если бы жидкость касалась шара только в узкой полосе при $\theta = \frac{\pi}{2}$, а $\varphi = 10^\circ - 15^\circ$. Но жидкость ударяется о шар и при других углах, где скорость

жидкости не равна линейной скорости соответствующих точек поверхности шара.

В точке M касательная скорость равна $Ax \cos\varphi$ а не Aa и, следовательно, здесь не жидкость раскручивает шар, а шар движет жидкость. Если найти силу, действующую на шар, то она будет иметь положительное направление до угла 45° , а после – направлена отрицательно.

Выводы:

1. Взвешенный шар в неоднородном поле скоростей жидкости увлекается жидкостью и вращается вследствие наличия градиента скорости.

2. Угловая скорость вращения шара не равна градиенту скорости жидкости на бесконечности, а составляет половину градиента скорости.

3. Момент сил, действующих на шар со стороны жидкости равен нулю, что обеспечивает его стационарное вращение.

4. Задача будет использована для рассмотрения влияния вращения кластеров на вязкость жидкости.

Список литературы

1. Лесин В.И., Лесин С.В. Кластерная модель вязкости жидкости. // Труды института проблем нефти и газа РАН. РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, Москва.
 2. Павлов А.М., Яламов Ю.И. Лекции по методам математической физики. Избранные вопросы математической физики. – М.: МОПИ им. Н.К. Крупской, 1990. – 176 с.