

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ЛЭМБА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ В ВИДЕ ДЕЛЬТА ФУНКЦИИ

Мусаев В.К.

МЭСИ, Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Рассматривается задача о численном моделировании продольных, поперечных и поверхностных волн на свободной поверхности упругой полуплоскости. Приводится изменение упругого контурного напряжения на свободной поверхности полуплоскости. Для решения двумерной нестационарной динамической задачи математической теории упругости с начальными и граничными условиями используем метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Применяется однородный алгоритм. С помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями привели к линейной задаче Коши. Приводится некоторая информация о численном моделировании упругих волн напряжений в упругой полуплоскости при сосредоточенном взрывном воздействии в виде дельта функции. Показано изменение упругого контурного напряжения на свободной поверхности полуплоскости.

Ключевые слова: нестационарные волны, численный метод, перемещение, скорость перемещений, ускорение, напряжение, теория упругости, краевая задача, задача с начальными условиями, задача Коши, методика, алгоритм, однородный алгоритм, комплекс программ, продольная волна, поперечная волна, коническая волна, волна Релея, поверхностная волна, задача Лэмба, упругая полуплоскость, напряжения на свободной поверхности

MATHEMATICAL MODELING OF SURFACE WAVES STRESSES IN THE TASK LAMB IMPACT IN THE FORM OF A DELTA FUNCTION

Musayev V.K.

MESI, Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

We consider the problem of numerical modeling of longitudinal, transverse and surface waves on the free surface of an elastic half-plane under a concentrated explosive impact in the form of a Delta function. Is the change in elastic contour stress on the free surface of the half-plane. For the solution of two-dimensional non-stationary dynamical problems of the mathematical theory of elasticity with initial and boundary conditions using the finite element method in the movements. The problem is solved by the method of end-to-end account, without allocation of breaks. Applied homogeneous algorithm. Using the finite element method in displacements, a linear problem with initial and boundary conditions has led to the linear Cauchy problem. Provides some information about the numerical simulation of elastic stress waves in elastic half-plane under a concentrated explosive impact in the form of a Delta function. Shows the variation in the elastic contour stress on the free surface of the half-plane.

Keywords: transient waves, numerical method, displacement, velocity, displacement, acceleration, strain, elasticity theory, boundary value problem, with initial conditions, the Cauchy problem, the methods, algorithms, homogeneous algorithm, complex programs, longitudinal wave, transverse wave, the conical wave, Rayleigh wave, surface wave, the task lamb, elastic half-plane, the stress at the free surface

Постановка задачи

Для решения задачи о моделировании нестационарных упругих волн в деформируемых областях сложной формы рассмотрим некоторое тело Γ (рис. 1) в прямоугольной декартовой системе координат

XOY , которому в начальный момент времени $t = 0$ сообщается механическое воздействие. Предположим, что тело Γ изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях.

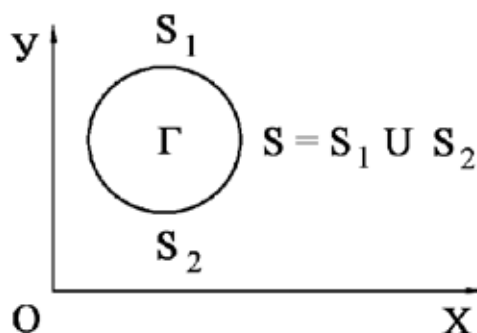


Рис. 1. Некоторое тело Γ в прямоугольной декартовой системе координат XOY

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$(x, y) \in \Gamma,$$

$$\sigma_x = \rho C_p^2 \varepsilon_x + \rho (C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_y,$$

$$\sigma_y = \rho C_p^2 \varepsilon_y + \rho (C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_x,$$

$$\tau_{xy} = \rho C_s^2 \gamma_{xy},$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$(x, y) \in (\Gamma \cup S), \quad (1)$$

где σ_x , σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора упругих напряжений; ε_x , ε_y и γ_{xy} – компоненты тензора упругих деформаций; u и v – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей OX и OY соответственно;

ρ – плотность материала; $C_p = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-v^2)}}$ – скорость продольной упругой волны;

$C_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+v)}}$ – скорость поперечной

упругой волны; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; $S (S_1 \cup S_2)$ – граничный контур тела Γ .

Систему (1) в области, занимаемой телом Γ , следует интегрировать при начальных и граничных условиях.

Начальные условия в области Γ зададим в виде

$$u|_{t=0} = u_0, \quad v|_{t=0} = v_0, \quad \dot{u}|_{t=0} = \dot{u}_0, \\ \dot{v}|_{t=0} = \dot{v}_0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (2)$$

где u_0 , v_0 , \dot{u}_0 и \dot{v}_0 – заданные в области Γ функции.

Граничные условия зададим в виде: составляющих компонентов тензора упругих напряжений на границе S_1

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m = A_x, \quad \tau_{xy} l + \sigma_y m = A_y, \\ (x, y) \in S_1; \quad (3)$$

составляющих компонентов вектора упругих перемещений на границе S_2

$$u = B_x, \quad v = B_y, \quad (x, y) \in S_2, \quad (4)$$

где l и m – направляющие косинусы; A_x , A_y , B_x и B_y – заданные на границе S функции.

В работах [1–10] приведена информация о моделировании волн напряжений в деформируемых областях.

Метод решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости

Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями – используем метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Чтобы выполнить динамический расчет методом конечных элементов, нужно иметь матрицу жесткости и матрицу инерции конечного элемента.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела Γ , записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\bar{H} \ddot{\bar{\Phi}} + \bar{K} \bar{\Phi} = \bar{R}, \quad \bar{\Phi}|_{t=0} = \bar{\Phi}_0, \quad \dot{\bar{\Phi}}|_{t=0} = \dot{\bar{\Phi}}_0, \quad (5)$$

где \bar{H} – матрица инерции; \bar{K} – матрица жесткости; $\bar{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\bar{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\bar{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; \bar{R} – вектор узловых упругих внешних сил.

Соотношение (5) система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями. Таким образом, с помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями привели к линейной задаче Коши (5).

Рассмотрим интегрирование системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями.

Для интегрирования уравнения (5) конечноэлементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду

$$\bar{H} \frac{d}{dt} \dot{\bar{\Phi}} + \bar{K} \bar{\Phi} = \bar{R}, \quad \frac{d}{dt} \bar{\Phi} = \dot{\bar{\Phi}}. \quad (6)$$

Интегрируя по временной координате соотношение (6) с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t \bar{H}^{-1} (-\bar{K}\vec{\Phi}_i + \vec{R}_i),$$

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t \vec{\Phi}_{i+1}, \quad (7)$$

где Δt – шаг по временной координате.

Основные соотношения метода конечных элементов в перемещениях получены с помощью принципа возможных перемещений и конечноэлементного варианта метода Галеркина. Рассмотрим устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек на квазирегулярных сетках. Система уравнений (5) для внутренних и граничных узловых точек, полученная в результате интегрирования уравнения движения теории упругости, должна давать решение, сходящееся к решению исходной системы (1).

Шаг по временной переменной Δt определяем из следующего соотношения

$$\Delta t = k \frac{\min \Delta l_i}{C_p}, \quad (i=1, 2, 3, \dots, r), \quad (8)$$

где Δl – длина стороны конечного элемента.

Результаты численного эксперимента показали, что при $k = 0,5$ обеспечивается устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек на квазирегулярных сетках.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать сложные задачи при нестационарных динамических воздействиях на сооружения. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90.

Некоторая информация о достоверности моделирования волн напряжений в деформируемых телах приведена в следующих работах [1–5, 8–10].

Решение задачи о сосредоточенном упругом взрывном воздействии

В упругой полуплоскости от сосредоточенного воздействия распространяются продольные, поперечные, рэлеевские и конические волны. Они распространяются с разной скоростью. В работе [7] приведена информация о численном решении задачи Лэмба. Рассмотрим задачу о воздействии сосредоточенной волны в виде дельта функции (рис. 3) перпендикулярной свободной поверхности упругой полуплоскости (рис. 2). В точке В перпендикулярно свободной поверхности ABC приложено упругое нормальное напряжение σ_y (рис. 3), которое при $0 \leq n \leq 10$ ($n = t/\Delta t$) изменяется линейно от 0 до P , а при $10 \leq n \leq 20$ от P до 0 ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = -0,1$ МПа (-1 кгс/см²)).

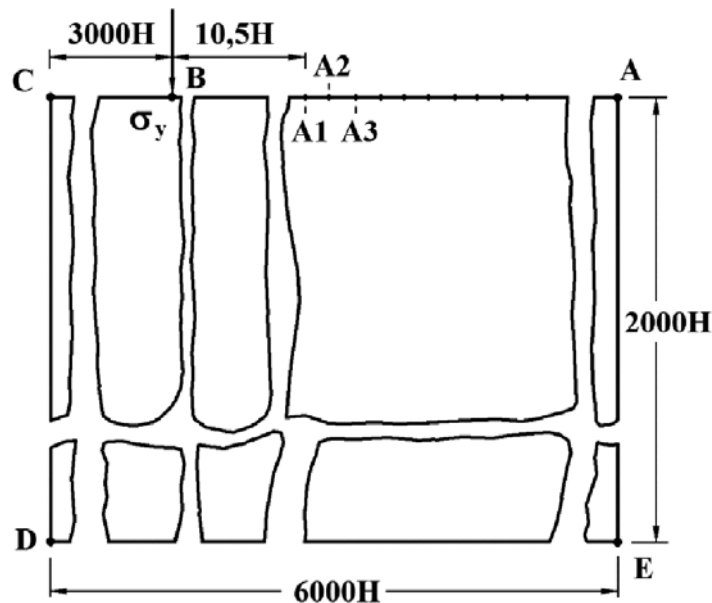


Рис. 2. Постановка задачи о воздействии сосредоточенной волны в виде дельта функции на свободной поверхности упругой полуплоскости

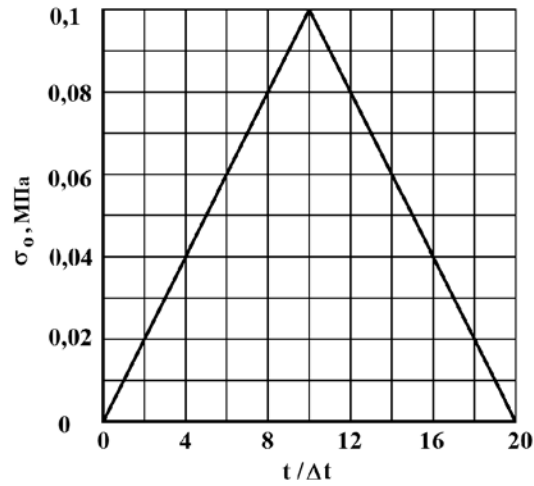


Рис. 3. Воздействие типа дельта функции

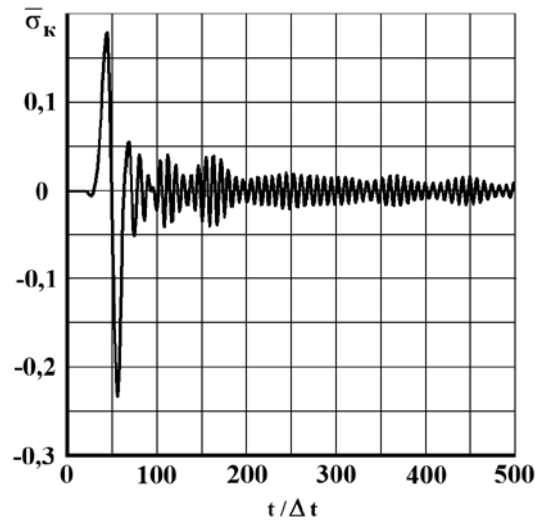


Рис. 4. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_\kappa$ во времени $t / \Delta t$ в точке A1

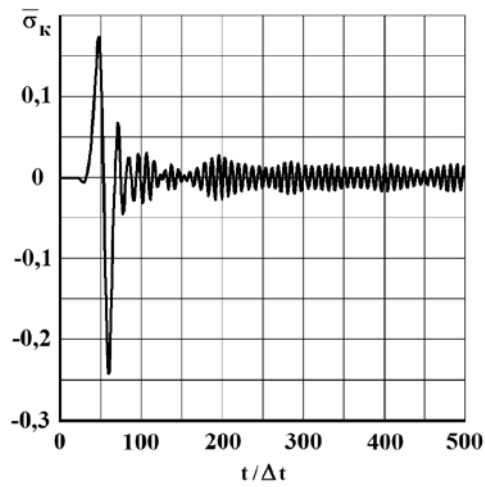


Рис. 5. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_\kappa$ во времени $t / \Delta t$ в точке A2

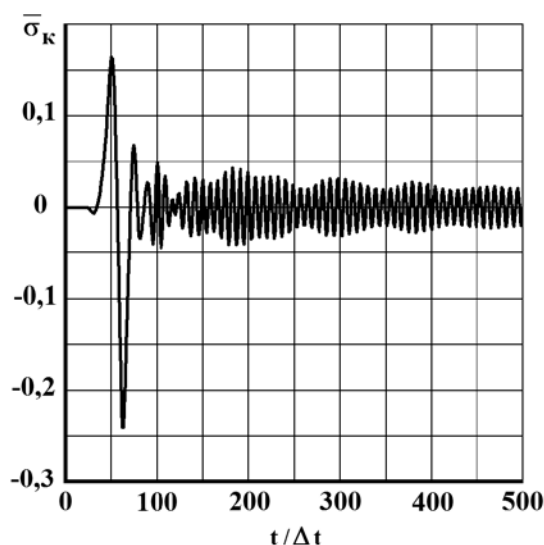


Рис. 6. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_\kappa$ во времени $t / \Delta t$ в точке A3

Граничные условия для контура *CDEA* при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура *CDEA* не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 500$. Контур *ABC* свободен от нагрузок, кроме точки *B*, где приложено сосредоточенное упругое нормальное напряжение σ_y .

Расчеты проведены при следующих исходных данных: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 1,393 \cdot 10^{-6}$ с; $E = 3,15 \cdot 10^4$ МПа ($3,15 \cdot 10^5$ кгс/см²); $\nu = 0,2$; $\rho = 0,255 \cdot 10^4$ кг/м³ ($0,255 \cdot 10^5$ кгс/см³); $C_p = 3587$ м/с; $C_s = 2269$ м/с. Решается система уравнений из 48032004 неизвестных.

Нарис. 4–6 показано изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_\kappa$ ($\bar{\sigma}_\kappa = \sigma_\kappa / |\sigma_0|$) во времени n в точках A1–A3 (рис. 2), находящихся на свободной поверхности упругой полуплоскости (расстояние между точками: A1 и A2 равно H ; A2 и A3 равно H).

Вывод

Амплитуда поверхностных волн Релея существенно больше амплитуд продольных, поперечных и других волн при воздействии перпендикулярного сосредоточенного воздействия в виде треугольного импульса на поверхности упругой полуплоскости.

Список литературы

1. Мусаев В.К. Решение задачи дифракции и распространения упругих волн методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1990. – № 4. – С. 74–78.
2. Мусаев В.К. Численное решение волновых задач теории упругости и пластичности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия прикладная математика и информатика. – 1997. – № 1. – С. 87–110.

3. Мусаев В.К. Об оценке достоверности и точности численного решения нестационарных динамических задач // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 3. – С. 48–60.

4. Мусаев В.К. Оценка достоверности и точности результатов вычислительного эксперимента при решении задач нестационарной волновой теории упругости // Научный журнал проблем комплексной безопасности. – 2009. – № 1. – С. 55–80.

5. Мусаев В.К. О моделировании отражения упругих волн напряжений от свободной поверхности деформируемой области // Двойные технологии. – 2012. – № 4. – С. 61–64.

6. Мусаев В.К. О моделировании безопасности технических объектов от взрывных воздействий // Стратегическая стабильность. – 2013. – № 1. – С. 69–72.

7. Мусаев В.К. Математическое моделирование волн напряжений в задаче Лэмба // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем. Материалы Всероссийской конференции с международным участием. – М.: РУДН, 2014. – С. 266–269.

8. Мусаев В.К. Математическое моделирование интерференции нестационарных упругих волн напряжений в виде треугольного импульса от свободной поверхности пластинки / В.К. Мусаев, С.В. Ситник, А.А. Тарасенко, В.Г. Ситник, М.В. Зюбина // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 4; URL: www.science-education.ru/118-14118 (дата обращения: 21.09.2014).

9. Мусаев В.К. Математическое моделирование отражения нестационарных упругих волн напряжений в виде треугольного импульса от свободной поверхности пластинки / В.К. Мусаев, С.В. Ситник, А.А. Тарасенко, В.Г. Ситник, М.В. Зюбина // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 9 (часть 7). – С. 1466–1470; URL: www.gae.ru/fs/?section=content&op=show_article&article_id=10004353 (дата обращения: 21.09.2014).

10. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11 – С. 10–14.