УДК 517.988.68

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА АКУСТИКИ И ЕЕ СВЕДЕНИЕ К ОПЕРАТОРНОМУ ВИДУ

Тюлепбердинова Г.А., Адилжанова С.А.

РГП «Казахский национальный университет им. Аль-Фараби», Алматы, e-mail: tyulepberdinova@mail.ru

В этой статье рассматривается динамическая обратная задача для уравнения акустики. Для исследования свойства оператора производной Фреше и сопряженного к нему оператора сведем дифференциальную постановку обратной задачи акустики к операторному виду. В обратной задачу введем новую переменную и получаем обратную задачу в которой по дополнительной информации надо найти решение и акустическую жесткость среды. А еще, обратную задачу можно будет свести к системе нелинейных интегральных уравнений вольтерровского типа, для которой можно будет получить серию результатов, включая теоремы о корректности и о сходимости метода итераций Ландвебера. Дальше уравнения образует систему нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. И дальше сведем обратную задачу для уравнения акустики к оператором виду.

Ключевые слова: обратная задача, уравнение акустики, производная Фреше, сопряженный оператор, уравнение Вольтерра, акустическая жесткость, метод итераций Ландвебера

INVERSE ACOUSTIK PROBLEM AND ITS REDUCTION TO AN OPERATOR MEAN

Tyulepberdinova G.A., Adilzhanova S.A.

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, e-mail: tyulepberdinova@mail.ru

In this article the dynamic return task for acoustics equation is considered. For research of property of the operator derivative Frechet and the operator interfaced to it we will reduce differential statement of the return problem of acoustics to an operator look. In the return a task we will enter a new variable and we receive the return task in which according to additional information it is necessary to find the solution and acoustic rigidity of the environment. And still, the return task can be reduced to system of the nonlinear integrated equations of Voltairian type for which it will be possible to receive a series of results, including theorems of a correctness and of convergence of a method of iterations of Landveber. Further the equation forms system of the nonlinear integrated equations of Voltaire of the second sort. We will reduce the return task for acoustics equation to an operatornm to a look further.

Keywords: the return task, acoustics equation, derivative Frechet, the interfaced operator, Voltaire's equation, acoustic rigidity, a method of iterations of Landveber

В статье рассматривается обратная задача акустики в случае сосредоточенного источника. Исходная задача сводится к системе нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Для этого с начало рассмотрим обратную задачу акустики [1, 2]

$$\frac{1}{c^2(z)}v_{tt} = v_{zz} - \frac{\rho'(z)}{\rho(z)}v_z, \quad z > 0, t > 0, \quad (1)$$

$$v|_{t<0} \equiv 0, \quad z > 0, \quad (2)$$

$$v_z|_{z=0} = \delta(t), \quad t > 0, \quad (3)$$

$$v(+0,t) = g(t), \quad t > 0, \quad (4)$$

где $\rho(z) > 0$ – плотность среды; $c(z) > 0$ – скорость распространения волн в среде. Прямая (обобщенная начально-краевая) задача (1)–(3) заключается в определении акустического давления $v(z,t)$ по известным $c(z)$ и $\rho(z)$. Прямая задача (1)–(3) корректна, подробнее исследование этой задачи можно найти в работах [3, 4].

Материалы и методы исследования

В обратной задаче (1)–(4) по дополнительной информации (4) надо найти либо $c(z)$, либо $\rho(z)$, либо некоторую их комбинацию. Покажем, что одновременно отыскать функции $c(z)$ и $\rho(z)$ в одномерной постановке невозможно, но их произведение можно найти.

Введем новую переменную

$$x = \varphi(z) := \int_0^z \frac{dz}{c(z)}.$$

Поскольку $c(z)$ неотрицательна, то для $\varphi(z)$ существует обратная функция $\psi(z)$ такая, что

$$\psi(\varphi(z)) = z.$$

Обозначим

$$u(x,t) = v(\psi(x),t), \qquad a(x) = c(\psi(x)), \qquad b(x) = \rho(\psi(x)).$$

Запишем обратную задачу (1)–(4) в переменных (x,t), обозначая $c(+0) = \gamma$

$$u_{tt} = u_{xx} - (a'/a + b'/b)u_x, \qquad x > 0, \qquad t > 0,$$

$$u|_{t<0} \equiv 0, \qquad x > 0,$$

$$u_x(+0,t) = \gamma\delta(t), \qquad t > 0, \qquad u(+0,t) = g(t), \quad t > 0.$$

Обозначая $\sigma(x)=a(x)b(x)$ и учитывая, что

$a'/a+b'/b=(\ln a)'+(\ln b)'=(\ln(ab))'=(\ln\sigma)'=\sigma'/\sigma$,

получим обратную задачу

$$u_{tt}=u_{xx}-2\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}u_x,\quad x>0,t>0,\qquad(5)$$

$$u|_{t<0}\equiv 0,\quad x>0,\qquad(6)$$

$$u_x(+0,t)=\gamma\delta(t),\quad t>0,\qquad(7)$$

$$u(+0,t)=g(t),\quad t>0.\qquad(8)$$

в которой по дополнительной информации (8) надо найти решение $u(x,t)$ и акустическую жесткость среды $\sigma(x)>0,\ x>0,\ \sigma\in H^1[0,\infty)$.

Нетрудно показать, что решение прямой задачи (5)–(7) имеет вид

$$u(x,t)=s(x)\theta(t-x)+\tilde{u}(x,t),\qquad(9)$$

где $\tilde{u}(x,t)$ – непрерывная при $x\ge 0$ и достаточно гладкая при $t>x>0$ функция, $s(x)=-\gamma\sqrt{\sigma(x)/\sigma(+0)}$, θ – тэта-функция Хевисайда.

Подставляя (9) в систему (5)–(8), получим эквивалентную обратную задачу относительно $u(x,t)$ и $s(x)$

$$u_{tt}=u_{xx}-2\frac{s'(x)}{s(x)}u_x,\quad t>x>0;\qquad(5')$$

$$u_x|_{x=0}=0,\quad t>0,\qquad(6')$$

$$u(x,x+0)=s(x),\quad x>0,\qquad(7')$$

$$u|_{x=+0}=g(t),\quad t>0.\qquad(8')$$

Обратная задача (5’)–(8’) предпочтительнее первоначальной постановки (1)–(4) по нескольким причинам. Во-первых, прямая задача (5’)-(7’), в отличие от прямой задачи (1)–(3), не имеет сингулярных составляющих. Во-вторых, в обратной задаче (5’)-(8’) не два, а один неизвестный коэффициент $s(x)$. Поэтому после доказательства локальной теоремы существования решения этой задачи станет ясно, что решение исходной обратной задачи (1)–(4) не является единственным, поскольку для одной функции $\sigma(x)=c(\psi(x))p(\psi(x))$ можно подобрать бесконечно много пар функций $\tilde{c}(\psi(x))=Cc(\psi(x),\ \tilde{p}(\psi(x))=C^{-1}p(\psi(x),\quad C=\text{const}$, удовлетворяющих исходной обратной задаче. В-третьих, обратную задачу (5’)–(8’) оказывается возможным свести к системе нелинейных интегральных уравнений вольтерровского типа, для которой получена серия результатов, включая теоремы о корректности и о сходимости метода итераций Ландвебера.

Сведение обратной задачи акустики к операторному виду. Сформулируем обратную задачу акустики в операторном виде, при этом оставим все обозначения принятые в работе [3].

Обозначим

$$q_1(x,t)=u_x(x,t),$$

$$q_2(x)=\frac{1}{s(x)}=-\frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{\sigma(+0)}{\sigma(x)}}=-\frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{\rho(+0)c(+0)}{\rho(\psi(x))c(\psi(x))}},$$

$$q_3(x)=2\frac{s'(x)}{s(x)}=\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}=c'(\psi(x))+\frac{\rho'(\psi(x))}{\rho(\psi(x))}c(\psi(x)).$$

Отметим, что поскольку

$$q_2'(x)=-\frac{s'(x)}{s^2(x)}=-\frac{1}{2}q_3(x)q_2(x),\qquad s(+0)=-\gamma,$$

то

$$q_2(x)=-\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{2}\int_0^x q_3(\xi)q_2(\xi)d\xi.\qquad(10)$$

Используем формулу Даламбера для представления решения задачи Коши (5’), (6’), (8’)

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[-q(t-x)+q(t+x)]+\frac{1}{2}\int_0^x\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}q_3(\xi)q_1(\xi,\tau)d\tau d\xi,\qquad(11)$$

и дифференцируем (11) по x

$$u_x(x,t)=q_1(x,t)=\frac{1}{2}[-q'(t-x)+q'(t+x)]$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x q_3(\xi)[q_1(\xi,t+x-\xi)+q_1(\xi,t-x+\xi)]d\xi.\qquad(12)$$

Положим в (11) по $t=x+0$

$$s(x)=\frac{1}{2}[q(+0)+q(2x)]+\frac{1}{2}\int_0^x\int_{\xi}^{2x-\xi}q_3(\xi)q_1(\xi,\tau)d\tau\, d\xi,$$

$$s'(x)=q'(2x)+\int_0^x q_3(\xi)q_1(\xi,2x-\xi)d\xi=\frac{1}{2}q_3(x)s(x).$$

Умножив почленно на (10), получаем

$$q_3(x)=\left[-\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{2}\int_0^x q_3(\xi)q_2(\xi)d\xi\right]\left[2q'(2x)+2\int_0^x q_3(\xi)q_1(\xi,2x-\xi)d\xi\right].\qquad(13)$$

Уравнения (12), (10), (13) образуют систему нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Решение этой системы будем искать в классе $q \in \vec{L}_2(l)$ таком, что $q_1 \in L_2(\Delta(l))$ и функции $q_2, q_3 \in L_2(0,l)$. Здесь

$$\Delta(l) := \{(x,t) \in R^2 : 0 < x < t < 2l - x\}, \quad l > 0.$$

Заметим, что если решение задачи (12), (10), (13) существует и

$$u \in L_2(\Delta(l)) \cap C^2(\Delta(l)), \quad s \in C^1(0,l), \quad g \in C^2(0,2l),$$

то по формуле $\sigma(x) = (\sigma(+0)/\gamma^2)s^2(x)$ мы можем найти решение обратной задачи (5')-(7'), при условии, что σ(+0) известно.

Результаты исследования и их обсуждение

Исследовать обратную задачу для уравнения акустики (5)–(8) будем в операторной форме

$$Aq = f, \tag{14}$$

где, в соответствии с (12), (10), (13),

$$Aq := q + Bq, \tag{15}$$

$$q(x,t) = (q_1, q_2, q_3)^T, \tag{16}$$

$$q_1(x,t) = u_x(x,t), \quad q_2(x) = \frac{1}{s(x)},$$

$$q_3(x) = 2\frac{s'(x)}{s(x)}.$$

$$f(x,t) = (f_1, f_2, f_3)^T, \tag{17}$$

$$f_1(x,t) = [g'(t+x) - g'(t-x)]/2,$$

$$f_2 = -\frac{1}{\gamma}, \quad f_3(x) = -\frac{2g'(2x)}{\gamma},$$

$$Bq = (B_1q, B_2q, B_3q)^T, \tag{18}$$

$$B_1q = -\frac{1}{2}\int_0^x q_3(\xi)[q_1(\xi, t+x-\xi) + q_1(\xi, t-x+\xi)]d\xi,$$

$$B_2q = \frac{1}{2}\int_0^x q_3(\xi)q_2(\xi)d\xi,$$

$$B_3q = 2B_2q[g'(2x) + B_4q] + (2/\gamma)B_4q,$$

$$B_4q = \int_0^x q_3(\xi)q_1(\xi, 2x-\xi)d\xi.$$

Заметим, что если $\{u(x,t), s(x)\}$ – решение задачи (5')-(8'), то вектор-функция $q(x,t)$, построенная по формуле (16), является решением задачи $Aq = f$.

Введем обозначение прямого произведения пространств $L_2(\Delta(l))$ и $L_2(0,l)$. Будем говорить, что элемент $q(x,t) = (q_1, q_2, q_3)^T$, принадлежит пространству $\vec{L}_2(l)$, если

$$q_1(x,t) \in L_2(\Delta(l)), \quad q_k(x) \in L_2(0,l), \quad k = 2,3,$$

где $\Delta(l) = \{(x,t) \in R^2 : 0 < x < t < 2l - x\}$.

Введем в пространстве $\vec{L}_2(l)$ скалярное произведение

$$\left\langle q^{(1)}, q^{(2)} \right\rangle_{\vec{L}_2(l)} = -\iint_{\Delta(l)} q_1^{(1)}(x,t)\, q_1^{(2)}(x,t)\, dx\, dt + \sum_{k=2}^{3} \int_0^l q_k^{(1)}(x)\, q_k^{(2)}(x) dx \tag{19}$$

и согласованную с ним норму

$$\|q\|^2_{\vec{L}_2(l)} := \langle q, q \rangle_{\vec{L}_2(l)} = \|q_1\|^2_{\vec{L}_2(\Delta(l))} + \sum_{k=2}^{3} \|q_k\|^2_{\vec{L}_2(0,l)}. \tag{20}$$

Заключение, выводы. В статье рассмотрена обратная задача акустики в случае сосредоточенного источника. Исходная задача сведена к системе нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Получена операторная форма обратной задачи для исследования свойства оператора производной Фреше и сопряженного к нему оператора.

Список литературы

1. Kabanikhin S.I., Iskakov K.T., Yamamoto M. H_1-conditional stability with explicit Lipschitz constant for a one-dimentional inverse acoustic problem // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2001. – Vol. 9, № 3. – P. 249-267.

2. Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Нурсеитова А.Т. Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы. – Алматы: Международный фонд обратных задач, 2006. – 432 с.

3. Тюлепбердинова Г.А. Сходимость метода наискорейшего спуска в дискретной обратной задаче для уравнения акустики // Материалы международной научной конференции «Теоретические и прикладные проблемы математики, механики и информатики». – Караганда: КарГУ, 2010. – № 6. – С. 165-166

4. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. – М.: Наука, 1984. – 264 с.