

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО СОСРЕДОТОЧЕННОГО УПРУГОГО ИМПУЛЬСНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ В ВИДЕ ДЕЛЬТА ФУНКЦИИ НА ГРАНИЦЕ ВОЗДУШНОЙ И ТВЕРДОЙ СРЕДЫ С ПОЛОСТЬЮ В ВИДЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКА (СООТНОШЕНИЕ ШИРИНЫ К ВЫСОТЕ ОДИН К ПЯТНАДЦАТИ)

Мусаев В.К.

*МЭСИ, Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru*

Для прогноза безопасности сложной системы, находящейся в воздушной и твердой среде, при вертикальном сосредоточенном воздействии применяется численное моделирование. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны методика, алгоритм и комплекс программ для решения линейных двумерных плоских задач, которые позволяют решать линейные задачи при импульсных воздействиях на сложные системы. Решена задача о сосредоточенном упругом воздействии на границе воздушной и твердой среды с полостью в виде прямоугольника (соотношение ширины к высоте один к пятнадцати). Исследуемая расчетная область имеет 20862 узловые точки. Решается система уравнений из 83448 неизвестных. Получены напряжения в точках, которые находятся в твердой среде.

**Ключевые слова:** численный метод, напряжение, динамическая теория упругости, волновая теория взрывной безопасности, сложная система, краевая задача, задача с начальными условиями, задача Коши, методика, алгоритм, однородный алгоритм, комплекс программ, продольная волна, поперечная волна, коническая волна, волна Релея, поверхностная волна, упругая полуплоскость, воздушная среда, твердая среда, напряжения на свободной поверхности, полость.

## NUMERICAL SIMULATION OF VERTICAL CONCENTRATED ELASTIC PULSE EFFECT IN THE FORM OF A DELTA FUNCTION AT THE BOUNDARY OF AIR AND SOLID MEDIA WITH A CAVITY IN THE FORM OF A RECTANGLE (RATIO OF WIDTH TO HEIGHT OF ONE TO FIFTEEN)

Musayev V.K.

*MESI, Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru*

For the prediction of safety of complex systems in the air and hard environment, with vertical centering effect is applied numerical modeling. Based on the finite element method in the movements of the developed method, algorithm and software package for solving linear two-dimensional flat tasks, which allow you to solve a linear problem with pulse effects on complex systems. The problem of centering the elastic effects at the boundary of air and solid media with a cavity in the form of a rectangle (ratio of width to height of one to fifteen). Analyzed the computational domain has 20862 anchor point. Solve the system of equations of 83448 unknown. The resulting voltage at the points that are in solid medium.

**Keywords:** numerical method, the voltage of the dynamic theory of elasticity, wave theory explosive safety, complex system, boundary value problem, with initial conditions, the Cauchy problem, the methods, algorithms, homogeneous algorithm, complex programs, longitudinal wave, transverse wave, the conical wave, Rayleigh wave, surface wave, elastic half-plane, air, solid environment, stresses on the free surface, the cavity.

### Постановка задачи

Рассматриваемые физические процессы решаются с помощью методов математического моделирования.

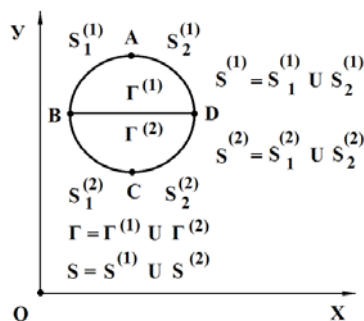


Рис. 1. Некоторое тело, состоящее из двух разных областей  $\Gamma^{(1)}$  и  $\Gamma^{(2)}$  в прямоугольной декартовой системе координат  $XOY$

Рассмотрим некоторое тело, состоящее из двух разных областей  $\Gamma^{(1)}$  (воздушная среда) и  $\Gamma^{(2)}$  (твердая среда) (рис. 1) в прямоугольной декартовой системе координат  $XOY$ , которому в начальный момент времени  $t = 0$  сообщается механическое воздействие. Предположим, что тело  $\Gamma^{(1)}$  изготовлено из деформируемой воздушной среды и является однородным изотропным материалом, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях. Если в деформируемом твердом теле предположим, что поперечная скорость распространения равна нулю, то можно получить уравнения состояния для воздушной среды.

Точные уравнения двумерной плоской динамической теории упругости для области  $\Gamma^{(1)}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^{(1)}}{\partial x} &= \rho^{(1)} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_y^{(1)}}{\partial y} &= \rho^{(1)} \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial t^2}, \quad (x, y) \in \Gamma^{(1)}, \\ \sigma_x^{(1)} &= \rho^{(1)} C_p^{2(1)} \varepsilon_x^{(1)} + \rho^{(1)} C_p^{2(1)} \varepsilon_y^{(1)}, \\ \sigma_y^{(1)} &= \rho^{(1)} C_p^{2(1)} \varepsilon_y^{(1)} + \rho^{(1)} C_p^{2(1)} \varepsilon_x^{(1)}, \\ \varepsilon_x^{(1)} &= \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^{(1)} = \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y}, \\ (x, y) &\in (\Gamma^{(1)} \cup S^{(1)}), \quad (1) \end{aligned}$$

где  $\sigma_x^{(1)}$  и  $\sigma_y^{(1)}$  – компоненты тензора упругих напряжений;  $\varepsilon_x^{(1)}$  и  $\varepsilon_y^{(1)}$  – компоненты тензора упругих деформаций;  $u^{(1)}$  и  $v^{(1)}$  – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей OX и OY соответственно;  $\rho^{(1)}$  – плотность материала;  $C_p^{(1)}$  – скорость продольной упругой волны;  $S^{(1)}$  ( $S^{(1)}_1 \cup S^{(1)}_2$ ) – граничный контур тела  $\Gamma^{(1)}$ .

Систему (1) в области, занимаемой телом  $\Gamma^{(1)}$ , следует интегрировать при начальных и граничных условиях.

Точные уравнения двумерной плоской динамической теории упругости для области  $\Gamma^{(2)}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(2)}}{\partial y} &= \rho^{(2)} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{yx}^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^{(2)}}{\partial y} &= \rho^{(2)} \frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial t^2}, \\ (x, y) &\in \Gamma^{(2)}, \\ \sigma_x^{(2)} &= \rho^{(2)} C_p^{2(2)} \varepsilon_x^{(2)} + \\ &+ \rho^{(2)} (C_p^{2(2)} - 2C_s^{2(2)}) \varepsilon_y^{(2)}, \\ \sigma_y^{(2)} &= \rho^{(2)} C_p^{2(2)} \varepsilon_y^{(2)} + \\ &+ \rho^{(2)} (C_p^{2(2)} - 2C_s^{2(2)}) \varepsilon_x^{(2)}, \\ \tau_{xy}^{(2)} &= \rho^{(2)} C_s^{2(2)} \gamma_{xy}^{(2)}, \\ \varepsilon_x^{(2)} &= \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^{(2)} = \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y}, \\ \gamma_{xy}^{(2)} &= \frac{\partial u^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x}, \\ (x, y) &\in (\Gamma^{(2)} \cup S^{(2)}), \quad (2) \end{aligned}$$

где  $\sigma_x^{(2)}$ ,  $\sigma_y^{(2)}$  и  $\tau_{xy}^{(2)}$  – компоненты тензора упругих напряжений;  $\varepsilon_x^{(2)}$ ,  $\varepsilon_y^{(2)}$ , и  $\gamma_{xy}^{(2)}$  – компоненты тензора упругих деформаций;  $u^{(2)}$  и

$v^{(2)}$  – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей OX и OY соответственно;  $\rho^{(2)}$  – плотность материала;  $C_p^{(2)}$  – скорость продольной упругой волны;  $C_s^{(2)}$  – скорость поперечной упругой волны;  $S^{(2)}$  ( $S^{(2)}_1 \cup S^{(2)}_2$ ) – граничный контур тела  $\Gamma^{(2)}$ .

Систему (2) в области, занимаемой телом  $\Gamma^{(2)}$ , следует интегрировать при начальных и граничных условиях. Для решения краевой задачи используется метод конечных элементов в перемещениях.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать сложные задачи при нестационарных динамических воздействиях на уникальные сооружения. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90.

В работах [1–10] приведена информация о моделировании волн напряжений в деформируемых телах с помощью применяемого численного метода.

#### Решение задачи о сосредоточенном упругом воздействии в виде дельта функции

Рассмотрим задачу о сосредоточенном упругом импульсном воздействии (рис. 2) на границе воздушной и твердой среды с полостью (рис. 3). Некоторая информация о достоверности применяемого численного метода приведена в следующих работах [1–2, 4–5, 9–10]. В точке В приложено нормальное нестационарное воздействие  $\sigma_y$ , которое при  $0 \leq n \leq 10$  ( $n = t / \Delta t$ ) изменяется линейно от 0 до P, при  $11 \leq n \leq 20$  изменяется P до 0 ( $P = \sigma_0$ ,  $\sigma_0 = -0,1$  МПа). Граничные условия для контура ABCJKI при  $t > 0$   $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$ . Отраженные волны от контура ABCJKI не доходят до исследуемых точек при  $0 \leq n \leq 200$ . На границе IHGFEDC приняты условия непрерывности перемещений.

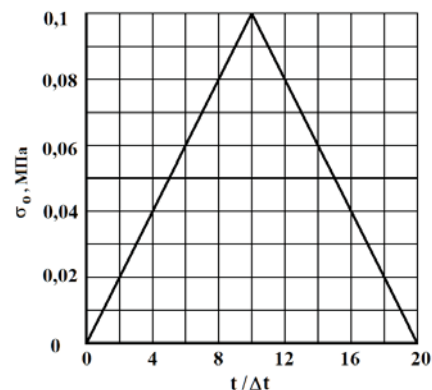


Рис. 2. Воздействие в виде треугольного импульса

Для области ABCDEFGHI приняты следующие исходные данные:

$H = \Delta x = \Delta y$ ;  $\Delta t = 0,147 \times 10^{-4}$  с;  $C_p = 340$  м/с;  
 $\rho = 1,22$  кг/м<sup>3</sup>.

Для области IHGFEDCJK приняты следующие исходные данные:

$H = \Delta x = \Delta y$ ;  $\Delta t = 0,125 \times 10^{-4}$  с;  $C_s = 400$  м/с;  
 $C_p = 250$  м/с;  $\rho = 1,469 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

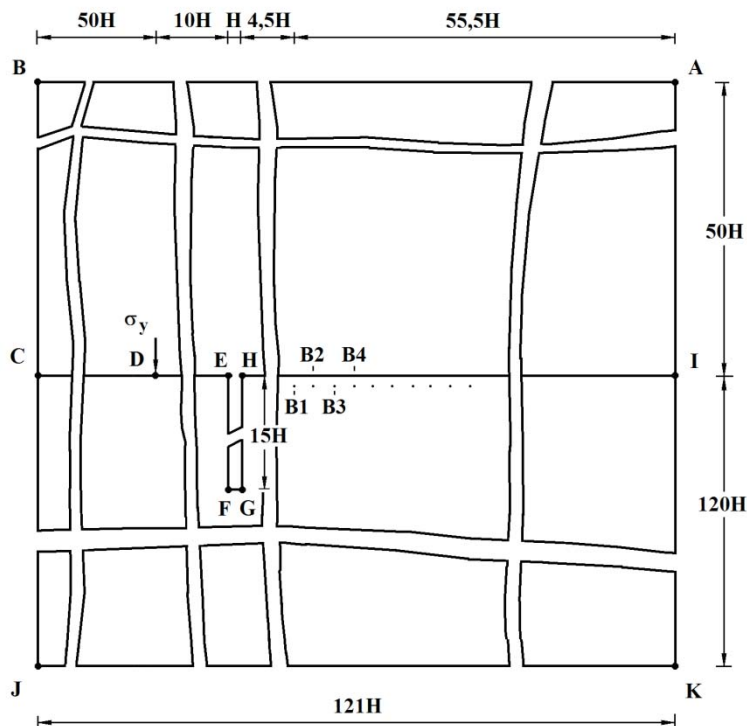


Рис. 3. Постановка задачи о сосредоточенном упругом импульсном воздействии на границе воздушной и твердой среды с полостью в виде прямоугольника (соотношение ширины к высоте один к пятнадцати)

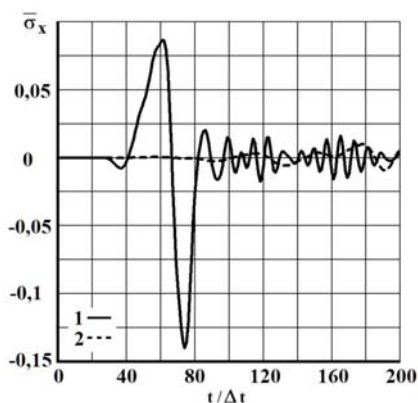


Рис. 4. Изменение упругого нормального напряжения  $\bar{\sigma}_x$  во времени  $t/\Delta t$  в точке B1: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче полостью (соотношение ширины к высоте один к пятнадцати)

В расчетах принимается минимальный шаг по времени, то есть  $\Delta t = 0,125 \times 10^{-4}$  с. Исследуемая расчетная область имеет 20862 узловых точек. Решается система уравнений из 83448 неизвестных. На рис. 4-7 представ-

лено изменение нестационарного упругого нормального напряжения  $\bar{\sigma}_x$  ( $\bar{\sigma}_x = \sigma_x / |\sigma_0|$ ) во времени  $t$  в точках B1-B4 (рис. 3) находящихся около границы воздушной и твердой среды (расстояние между точками: B1 и B2 равно H; B2 и B3 равно H; B3 и B4 равно H).

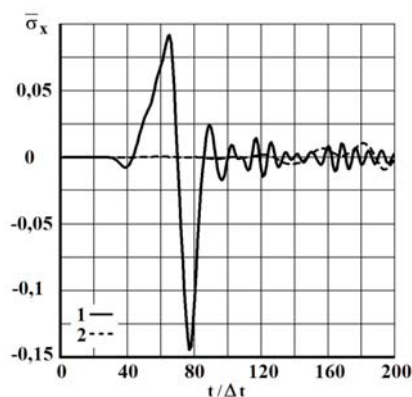


Рис. 5. Изменение упругого нормального напряжения  $\bar{\sigma}_x$  во времени  $t/\Delta t$  в точке B2: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче полостью (соотношение ширины к высоте один к пятнадцати)

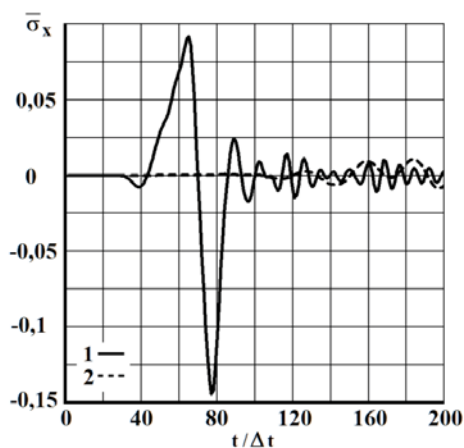


Рис. 6. Изменение упругого нормального напряжения  $\bar{\sigma}_x$  во времени  $t / \Delta t$  в точке В3: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче полостью (соотношение ширины к высоте один к пятнадцати)

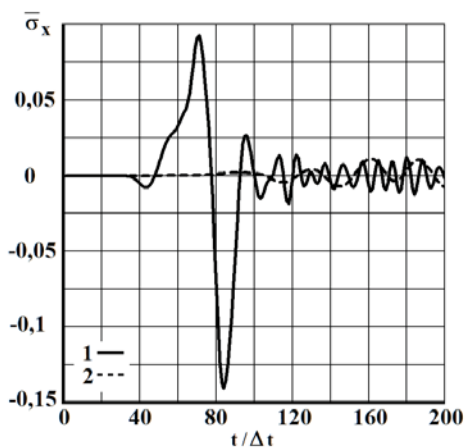


Рис. 7. Изменение упругого нормального напряжения  $\bar{\sigma}_x$  во времени  $t / \Delta t$  в точке В4: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче полостью (соотношение ширины к высоте один к пятнадцати)

### Выводы

Полость, с соотношением ширины к высоте один к пятнадцати, уменьшает величину упругого растягивающего нормального напряжения  $\bar{\sigma}_x$  в 7,833 раза.

Полость, с соотношением ширины к высоте один к пятнадцати, уменьшает величину

упругого сжимающего нормального напряжения  $\bar{\sigma}_x$  в 16,0 раз.

### Список литературы

1. Мусаев В.К. Численное решение волновых задач теории упругости и пластичности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия прикладная математика и информатика. – 1997. – № 1. – С. 87–110.
2. Мусаев В.К. Численное моделирование распространения плоских продольных волн напряжений в виде треугольного импульса с большой линейной нисходящей частью в упругой полуплоскости // Проблемы безопасности российского общества. – 2014. – № 2. – С. 102–112.
3. Мусаев В.К. Математическое моделирование пластических контурных напряжений в свободном квадратном отверстии при нестационарном сейсмическом воздействии // Проблемы безопасности российского общества. – 2014. – № 2. – С. 113–124.
4. Мусаев В.К. Математическое моделирование интерференции нестационарных упругих волн напряжений в виде треугольного импульса от свободной поверхности пластинки / В.К. Мусаев, С.В. Ситник, А.А. Тарасенко, В.Г. Ситник, М.В. Зюбина // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 4; URL: [www.science-education.ru/118-14118](http://www.science-education.ru/118-14118) (дата обращения: 21.09.2014).
5. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11 – С. 10–14.
6. Мусаев В.К. Определение упругих напряжений в плотине Койна с основанием с помощью волновой теории сейсмической безопасности // Успехи современного естествознания. – 2014. – № 12 (3). – С. 235–240; URL: [www.rae.ru/use/?section=content&op=show\\_article&article\\_id=10003415](http://www.rae.ru/use/?section=content&op=show_article&article_id=10003415) (дата обращения: 01.01.2015).
7. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 12 (1). – С. 28–32; URL: [www.rae.ru/snt/?section=content&op=show\\_article&article\\_id=10003413](http://www.rae.ru/snt/?section=content&op=show_article&article_id=10003413) (дата обращения: 01.01.2015).
8. Мусаев В.К. Моделирование безопасности по несущей способности дымовых труб с основанием при взрыве атомной бомбы в Нагасаки // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 12. – С. 198–203; URL: [www.rae.ru/upfs/?section=content&op=show\\_article&article\\_id=6297](http://www.rae.ru/upfs/?section=content&op=show_article&article_id=6297) (дата обращения: 01.01.2015).
9. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11. – С. 10–14; URL: [www.rae.ru/upfs/?section=content&op=show\\_article&article\\_id=6064](http://www.rae.ru/upfs/?section=content&op=show_article&article_id=6064) (дата обращения: 01.01.2015).
10. Мусаев В.К. Математическое моделирование отражения нестационарных упругих волн напряжений в виде треугольного импульса от свободной поверхности пластинки / В.К. Мусаев, С.В. Ситник, А.А. Тарасенко, В.Г. Ситник, М.В. Зюбина // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 11–11. – С. 2375–2379; URL: [www.rae.ru/fs/?section=content&op=show\\_article&article\\_id=10005217](http://www.rae.ru/fs/?section=content&op=show_article&article_id=10005217) (дата обращения: 01.01.2015).