УДК 536.24

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ В СОПРЯЖЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

Мадера А.Г.

ФГБУН Научно-исследовательский институт Системных исследований РАН, Москва, e-mail: alexmadera@mail.ru

Математические модели конвективного теплообмена, используемые в при решении уравнений теплопроводности, основаны на концепции коэффициента теплоотдачи и линейном уравнении теплообмена Ньютона. Такой подход зачастую приводит к неадекватным адекватному моделированию реальных процессов теплопередачи. В статье предлагается подход, основанный на сопряженной формулировке математической модели конвективного теплообмена и приближенном аналитическом решении, достаточно точным для инженерной практики. Показано, что поток тепла с поверхности тела в среду пропорционален разности температур в степени 5/4, в то время как в законе теплообмена Ньютона поток тепла пропорционален первой степени температуры. Указанная зависимость вносит существенную погрешность в результаты расчетов. Включение предлагаемых моделей в программные комплексы теплового проектирования систем позволяет значительно повысить точность расчетов тепловых режимов.

Ключевые слова: конвективный теплообмен, сопряженная модель, математическое и компьютерное моделирование

MATHEMATICAL MODELING OF NATURAL CONVECTION OF VERTICAL PLATE AT CONJUGATED HEAT TRANSFER

Madera A.G.

Scientific Research Institute for System Investigations, Moscow, e-mail: alexmadera@mail.ru

Mathematical models of convective heat transfer used in the solution of the heat equation, are based on the concept of the heat transfer coefficient and linear equations of Newton. This approach often leads to un-adequate modeling of real processes of heat transfer. The paper proposes an approach based on the conjugated convective formulation of mathematical mo-del and approximate analytical solution, sufficiently accurate for engineering practice. It is shown that the heat flow from the body surface to the environment is proportional to the 5|4 degree of temperature difference, whereas the heat flow in the law of Newton is proportional to the first degree of temperature. These makes a significant error in the calculation results. Turn-of the proposed models in to the software thermal design of systems, the system can significantly improve the accuracy of calculations of thermal modes.

Keywords: convective heat transfer, conjugated heat transfer, mathematical modeling, simulation

Конвективный теплообмен между телом и средой (жидкостной, воздушной) описывается системой уравнений гидродинамики, включающей в себя уравнения Навье-Стокса, непрерывности и переноса энергии. Эти уравнения чрезвычайно сложны и их решению (аналитическому, численному) посвящено огромное число работ. Многие работы рассматривают многочисленные частные случаи и их решения применительно к конкретным условиям [2, 3, 9]. Часть работ анализирует стохастический характер течений жидкости [4, 11, 12]. Для того, чтобы иметь возможность моделировать сложные реальные процессы конвективного теплообмена, во многих работах прибегают к допущениям, упрощающим математическую модель и ее решение.

Одно из таких принципиальных упрощений, получившее широкое распространение в инженерной практике, постулирует закон конвективного теплообмена между твердым телом и средой в форме линейной связи между потоком тепла от тела в среду P и разностью температур $T_w - T_a$ поверхности нагретого тела T_w, с площадью теплообмена S, и среды T_a. Этот закон конвективного теплообмена, называемый еще линейным уравнением Ньютона, основывается на концепции коэффициента теплоотдачи (КТО), согласно которой коэффициент теплоотдачи α включает в себя всю сложность конвективного теплообмена и зависит от большого числа разнообразных физических и геометрических факторов, а также условий и режимов, в которых протекают процессы конвекции в конструкции реальной системы. Линейное уравнение Ньютона конвективного теплообмена имеет вид [4, 6, 7, 10] $P = \alpha\ S\ (T_w - T_a)$. На практике, для изучения процессов конвективного теплообмена, протекающих в реальных конструкциях, а также для получения значений коэффициента теплоотдачи, прибегают в каждом данном конкретном случае к проведению сложных и трудоемких экспериментальных исследований, с последующей обработкой полученных экспериментальных данных методами теории подобия [3, 10].

Вместе с тем конвективное взаимодействие не описывается концепцией КТО и зачастую приводит к неадекватным результатам в практике теплового моделирования и проектирования тепловых режимов систем. Для повышения адекватности моделирования конвективных процессов теплообмена в системах, необходимо заменить концепцию КТО подходом, основанном на концепции сопряженного конвективного теплообмена, согласно которой в результате взаимодействия температурных полей тела и омывающей ее среды необходимо решать совместно уравнения распространения тепловых потоков в твердом теле и в жидкости, а также уравнения движения среды Навье-Стокса.

В данной статье формулируются уравнения математической модели конвективного теплообмена в сопряженной постановке применительно к воздушной среде. В статье также приводится подход, позволяющий получать замкнутые аналитические решения конвективного теплообмена для вертикальной одномерной пластины. Полученное решение может быть использовано в программных комплексах теплового проектирования систем [8].

Математическая модель сопряженного конвективного теплообмена

Сопряженная постановка задачи конвективного теплообмена характеризуется тем, что в отличие от простой несопряженной постановки, к традиционным уравнениям Навье-Стокса, переноса энергии и неразрывности добавляются уравнения теплопроводности в твердом теле, а также граничные условия 4 рода, выражающие равенство температур и тепловых потоков в каждой точке соприкосновения жидкости и тела.

Рассмотрим свободную конвекцию в воздушную среду, Пренебрежем изменением плотности воздушной среды под влиянием изменения давления, но изменением плотности из-за неравномерности нагретого воздуха пренебрегать нельзя. Уравнения математической модели считаются стационарными и не зависящими от времени. Координата x, направлена вертикально вверх, координата y перпендикулярна пластине, вдоль координаты z изменения температурного поля и поля скоростей в среде отсутствуют. Для пограничного слоя, давление $p' = 0$, $v_z = 0$, $\partial/\partial z = 0$ для плоскопараллельного потока, получим:

– уравнение Навье-Стокса в воздушной среде

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \beta g (T - T_a), \quad (1)$$

– уравнение переноса энергии в воздушной среде

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (2)$$

– уравнение непрерывности воздушной среды

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

– уравнение теплопроводности пластины ($\partial^2 T_w/\partial z^2 = 0$)

$$\lambda_w \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} + \lambda_w \frac{\partial^2 T_w}{\partial y^2} + Q(x, y) = 0, \quad (4)$$

– граничные условия для скоростей воздуха:

$$v_x = v_y = 0 \ (y = 0);$$

$$v_x = 0,$$

$$T = T_a \text{ (для } y \text{ вне пограничного слоя)}, \quad (5)$$

– граничные условия 4 рода:

$$-\left(\lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial y}\right)_{y=0} = -\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0},$$

$$T_w \big|_{y=0} = T \big|_{y=0} \quad (6)$$

где v_x и v_y – скорости воздуха вдоль осей x и y соответственно; $T = T\ (x,\ y)$ и $T_w = T_w\ (x,\ y)$ – распределения температуры в воздушной среде и пластине соответственно; $Q\ (x,\ y)$ – объемная плотность распределения интенсивностей источников теплоты в пластине; T_a – температура воздуха за пределами пограничного слоя; Q – объемная плотность внутренних источников теплоты в теле; T_a – некоторые постоянные средние значения температуры в жидкости; T_w – трехмерное температурное поле в теле; ν – кинематическая вязкость, $a = \lambda/\rho c$ – температуропроводность, теплопроводность λ, плотность ρ, удельная теплоемкость c, температурный коэффициент расширения β среды; λ_w – теплопроводность материала тела; g – ускорение свободного падения; n – нормаль к поверхности тела.

Математическое моделирование свободного конвективного теплообмена вертикальной пластины со средой в сопряженной постановке

Рассмотрим теплообмен между вертикальной пластиной с внутренним источником теплоты и средой. Согласно концепции сопряженного моделирования конвективного теплообмена между телом и средой, сначала следует найти распределения температуры в теле T_w и среде T, при некоторых пока неизвестных тепловых потоках q_w,

q и температурах T_w и T на границе их раздела, а затем сшить полученные решения с помощью граничных условий четвертого рода, приравняв в каждой точке границы тепловые потоки и температуры как со стороны тела, так и со стороны среды.

Температурное поле пластины. Направим ось x вертикально вверх вдоль пластины, ось y – перпендикулярно пластине (горизонтально), а ось z – вдоль пластины в горизонтальном направлении. Распределение источников тепла будем считать равномерным по объему пластины. Это означает, что температурное поле не изменяется в пластине (на длине l_z) и среде вдоль оси z, изменяется в пластине по оси y и изменяется в среде по осям x и y; другими словами температурное поле пластины одномерно, а среды – двумерно [1, 4–7].

Математическая модель свободной конвекции между вертикальной одномерной пластиной и двумерной средой описывается уравнениями (1)–(6), за исключением уравнения теплопроводности в пластине (4), в котором должен отсутствовать член со второй производной по координате x, в силу одномерности температурного поля пластины. Примем, что торцы пластины теплоизолированы, с одной поверхности пластины (при $y = l_y$, l_y – толщина пластины) происходит теплообмен со средой, а другая ее поверхность ($y = 0$) – теплоизолирована. Таким образом, уравнение одномерной теплопроводности вертикальной пластины с внутренним источником теплоты и указанными условиями на ее поверхностях, имеют вид [2, 3, 4]:

$$\lambda_w \frac{\partial^2 T_w}{\partial y^2} + Q = 0, \qquad (7)$$

$$\left(\lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial y}\right)_{y=0} = 0,$$

$$\left(\lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial y}\right)_{y=l_y} = q_w,$$

$$\left(\lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial x}\right)_{x=0,\,h} = 0, \qquad (8)$$

где q_w – тепловой поток на границе раздела пластины и среды, $q_w = Q\ ly$; $l_x = h$ – высота пластины.

Решением этих уравнений является одномерное температурное поле вертикальной пластины:

$$T_w(y) = \frac{Q l^2}{2\lambda_w}\left(1 - \frac{y^2}{l_y^2}\right) + T_w(l), \qquad (9)$$

в котором $T_w(l)$ представляет собой неизвестную пока температуру на границе раздела пластины ($y = l_y$) и среды ($y = 0$) и которая определяется из решения сопряженной математической модели.

Температурное поле среды. Температурное поле в среде, пребывающей в состоянии свободной естественной конвекции с омываемой ею телом, определяется уравнениями (1)–(3), описывающими процесс взаимодействия между температурными полями тела и среды, возникающими в результате конвективных процессов, которые зависят сложным образом зависят не только от полей температуры, но и от векторного поля скоростей в каждой точке среды. Решения уравнений (1)–(3) имеют вид [3, 9] относительно безразмерных комплексов для температурного поля среды θ и координаты ξ

$$\theta = \frac{T - T_a}{T_w - T_a},\ \xi = \frac{y}{x}\left(\frac{1}{4}Gr_x\right),$$

где Gr_x – локальный безразмерный критерий Грасгофа [3].

Зависимости θ(ξ) для каждого значения критерия Pr с достаточной для практики точностью (не более 3 %) могут быть аппроксимированы многочленом второй степени (параболой). Для воздуха ($Pr = 0{,}72$) она может быть аппроксимирована параболой $\theta(\xi|Pr = 0{,}72) = 0{,}05(\xi - 4{,}5)^2$, откуда сразу же получается аналитическая формула для двумерного температурного поля среды $T = T(x, y)$

$$T = 0{,}05(T_w - T_a)\left(\frac{y}{x}\left(\frac{1}{4}Gr_x\right)^{1/4} - 4{,}5\right)^2 + T_a. \qquad (10)$$

Решение задачи конвективного теплообмена в сопряженной постановке. Для получении искомого решения задачи сопряженного конвективного теплообмена приравняем на границе раздела пластины и среды тепловые потоки как со стороны среды ($y = 0$), так и со стороны пластины ($y = l_y$). После несложных преобразований получим температурное поле среды $T(x)$ на поверхности границы раздела между вертикальной пластиной и средой, вдоль оси x, которое установится в результате свободно конвективного теплообмена:

$$T(x) - T_a = 2{,}5\left(\frac{P}{\lambda_a h l_z}\right)^{4/5}\left(\frac{x v^2}{\beta g}\right)^{1/5}. \qquad (11)$$

В последнем выражении введен полный тепловой поток P внутреннего источника теплоты в теле, который связан с объемной плотность Q равенством $P = Q\ h\ l_y\ l_z$, где l_z – длина пластины вдоль оси z. Установившееся в результате конвективного теплообмена с воздушной средой температурное поле вдоль границы раздела поверхность пластины – среда $T(x)$ (11), приведено на рис. 1. Зависимость $T_w - T_a$ построена для безразмерной координаты x/h вдоль вертикальной оси x, при следующих параметрах пластины и воздушной среды: $T_a = 30$ °C, $P = 5$ Вт, $\rho = 1{,}165$ кг/м^3, $\lambda = 0{,}026$ Вт/мК, $\nu = 0{,}000016$ м^2/с, $l_x \times l_y \times l_z = 0{,}16$ м×0,002 м×0,2 м.

Из решения следует, что температурное поле в среде на границе раздела пластина – среда довольно сильно изменяется вдоль координаты x, даже при бесконечно большой теплопроводности пластины, при которой температура ее поверхности T_w постоянна. Поэтому замена температурных распределений их усредненными характеристиками, как в концепции КТО будет приводить к неадекватным результатам.

Сравним линейное уравнение Ньютона в концепции КТО с аналогичным приближением, но полученным на основании точного решения (11). Усреднив по высоте пластины h температуру поверхности границы раздела пластина – среда, после интегрирования (11) и несложных преобразований получим среднюю по высоте пластины температуру на границе раздела пластина – среда:

$$T_w - T_a = 1{,}986\left(\frac{P}{\lambda_a l_z}\right)^{4/5}\left(\frac{\nu^2}{\beta g h^3}\right)^{1/5}. \quad (12)$$

Отсюда получаем соотношение, связывающее тепловую мощность P внутренних источников теплоты в пластине с разностью температур поверхности пластины и окружающей ее средой $T_w - T_a$: в виде подобном закону Ньютона $P = A(T_w - T_a)^{5/4}$,

$$A = 0{,}424\,\frac{\lambda_a l_z}{\left(\dfrac{\nu^2}{\beta g h^3}\right)^{1/4}}.$$

Сравнение соотношений Ньютона и полученного решения показывает существенное отличие концепции КТО и линейного закона Ньютона от полученной модели (13), (14) конвективного теплообмена, так как по закону Ньютона тепловой поток P должен быть прямо пропорционален $T_w - T_a$, в то время как (13), 14), он пропорционален $(T_w - T_a)^{5/4}$.

Список литературы

1. Кандалов П.И., Мадера А.Г. Моделирование температурных полей в многослойных структурах // Программные продукты и системы. – 2008. – № 4. – С. 11.

2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1992.

3. Лыков А.В. Тепломассообмен. 2-е изд. – М.: Энергия, 1978.

4. Мадера А.Г. Моделирование теплообмена в технических системах. – М.: Науч. фонд «Первая исслед. лаб. им. акад. В.А. Мельникова», 2005.

5. Мадера А.Г. Иерархический подход при тепловом проектировании электронных изделий // Программные продукты и системы. – 2008. – № 4. – С. 10.

6. Мадера А.Г., Кандалов П.И. Моделирование трехмерных температурных полей в электронных модулях // Программные продукты и системы. – 2010. – № 2. – С. 36.

7. Мадера А.Г., Кандалов П.И. Матрично-топологический метод математического и компьютерного моделирования температурных полей в электронных модулях: программный комплекс STF-ElectronMod // Программные продукты и системы. – 2012. – № 4. – С. 34.

8. Программный комплекс Simulation of Temperature Fields of Electronic Modules 2013 (STF-ElectronMod 2013) / П.И. Кандалов, А.Г. Мадера / Свидетельство о Гос. регистрации ПК для ЭВМ № 2013615400 от 6.6.2013.

9. Себиси Т., Брэдшоу П. Конвективный теплообмен. Физические основы и вычислительные методы. – М.: Мир, 1987.

10 Справочник по теплообменникам. Т. 1 / Пер. с англ. – М., Энергоатомиздат, 1987.

11. Madera A.G. Modelling of stochastic heat transfer in a solid // Applied Mathematical Modelling. – 1993. – Т. 17, № 12. – Р. 664–668.

12. Madera A.G., Sotnikov A.N. Method for analyzing stochastic heat transfer in a fluid flow // Applied Mathematical Modelling. – 1996. – Т. 20, № 8. – Р. 588–592.