

УДК 681.3.06

РЕШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В СРЕДЕ ПАКЕТА MATHCAD

Тарбокова Т.В.

ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Томский политехнический университет», Томск,
e-mail: toktv@list.ru

Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) «вручную» требует много времени, большого внимания, довольно громоздких преобразований и вычислений. Если допущена ошибка в решении СЛАУ, её бывает нелегко обнаружить. Целью применения пакета Mathcad в учебном процессе явилась потребность использования возможностей компьютеров для решения СЛАУ. Преимущества предлагаемого алгоритма заключаются в том, что решение СЛАУ осуществляется не формально, когда возвращается единственный вариант ответа. В процессе реализации алгоритма исследуются основные свойства СЛАУ: ранги основной и расширенной матриц системы, выбираются базисные неизвестные и свободные неизвестные, возвращаются общие решения при любом допустимом выборе базисных и свободных неизвестных. Заменяя столбцы основной матрицы СЛАУ столбцом свободных членов со свободными неизвестными, можно получить общее решение и методом Крамера, о чём в учебной литературе упоминаний нет.

Ключевые слова: Mathcad, системы линейных алгебраических уравнений, алгоритм

THE SOLUTION OF INDEFINITE SETS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS USING MATHCAD

Tarbokova T.V.

Tomsk Polytechnic University (TPU), Tomsk, e-mail: toktv@list.ru

Solving sets of linear algebraic equations without using a computer requires a lot of time and a lot of calculations. If there is an error in the solving, it is difficult to find. The aim of this work is the use of computer for solving sets of linear algebraic equations with MathCAD. The proposed algorithm for solving sets of linear equations using matrix method allows you to find a general solution for any admissible choice of basic and free unknowns, explore the basic properties of the system such as consistency, the main rank of the extended matrix of the system, and to obtain partial solutions. The possibility to obtain the general solution of sets of linear algebraic equations by Cramer's rule is described. In the academic literature there is no mention of the use Cramer's rule to find the general solution of a set of linear algebraic equations.

Keywords: MathCAD, the set of linear algebraic equations, algorithm

Линейное алгебраическое уравнение можно определить как уравнение, в котором искомые неизвестные входят в первой степени и между собой не перемножаются, т.е. в левой части линейного уравнения обычно записывается линейная комбинация искомых неизвестных, а в правой – свободный член. Совокупность таких уравнений образует систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Если СЛАУ имеет единственное решение, то она называется определённой. В случаях, когда решений бесконечное множество, СЛАУ называется неопределённой. Для решения определённых СЛАУ применяют методы Крамера, Гаусса, матричный, численные методы. Для неопределённой СЛАУ можно находить общее решение и какие-либо частные решения из их бесконечного множества.

В соответствии с ФГОС раздел «Линейная алгебра» модуля «Математика 1» входит в рабочие программы всех унифицированных образовательных математических кластеров дисциплины «Математика» [1]. В рабочие программы в обязательном порядке включаются индивидуальные домашние задания (ИДЗ) по всем разделам, в том числе

и по разделу «Линейная алгебра». Решение СЛАУ «вручную» требует много времени, большого внимания, довольно громоздких преобразований и вычислений. Если допущена ошибка в решении СЛАУ, её бывает нелегко обнаружить. Целью применения пакета Mathcad в учебном процессе явилась потребность использования возможностей компьютеров для решения СЛАУ.

Квадратные СЛАУ с невырожденной основной матрицей системы, а также матричные уравнения в среде пакета Mathcad легко решаются матричным методом. Например, чтобы решить СЛАУ

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 12, \\ 2x + y + 3z = 16, \\ 3x + 2y + z = 8, \end{cases}$$

достаточно задать основную матрицу системы

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

столбец свободных членов

$$B := \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \\ 8 \end{bmatrix},$$

записав произведение обратной матрицы A^{-1} на матрицу B и воспользовавшись клавишей « \Rightarrow », получить решение:

$$A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Проверка правильности решения также осуществляется в одно действие умножением матрицы A на найденную матрицу решения:

$$A \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Можно предварительно записать найденную матрицу

$$X := \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

решения СЛАУ, тогда для проверки потребуется ввести с клавиатуры произведение $A \cdot X$ и клавишу « \Rightarrow »:

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Начиная с шестой версии Mathcad, квадратные СЛАУ с невырожденной матрицей можно решать, используя встроенную функцию $\text{lsolve}(A,B)$: $X := \text{lsolve}(A,B)$, и сразу получить решение

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Для решения неопределенных СЛАУ в среде пакета Mathcad имеется несколько возможностей. Версия Mathcad 13/14 (в предыдущих версиях Mathcad основная матрица СЛАУ должна быть квадратной) позволяет находить одно из бесконечного множества частных решений СЛАУ при помощи встроенной функции $\text{lsolve}(A,B)$ [2]. Например, так:

$$\begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix} := \text{lsolve} \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -0.833 \\ -0.333 \\ 0.167 \end{bmatrix},$$

если решается СЛАУ

$$\begin{cases} t + 3u + 5v = -1, \\ 2t + 4u + 6v = -2. \end{cases}$$

Замена знака равенства стрелкой из палитры символьных операций Symbolic возвращает частное решение в виде рациональных чисел:

$$\begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix} := \text{lsolve} \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right) \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Но общее решение, применяя встроенную функцию $\text{lsolve}(A,B)$, найти не удастся.

Получить общее решение СЛАУ можно директивой solve палитры символьных операций Symbolic. Для этого надо в левую метку директивы solve записать матрицу из одного столбца и таким количеством строк, сколько уравнений в СЛАУ, отделяя свободные члены равенствами из палитры Boolean или вводя знаки « \Rightarrow » с клавиатуры вместе с клавишей Ctrl (получается «жирный» знак равенства). В правой метке следует перечислить имена всех неизвестных СЛАУ. Например,

$$\left(\begin{matrix} t + 3u + 5v = -1 \\ 2t + 4u + 6v = -2 \end{matrix} \right) \text{solve}, t, u, v \rightarrow (v - 1, -2 \cdot v, v).$$

Возвращается общее решение, в котором t, u – базисные неизвестные, v – свободная неизвестная. Частное решение, возвращаемое встроенной функцией $\text{lsolve}(A,B)$, соответствует свободной неизвестной $v = \frac{1}{6}$.

Недостаток применения директивы solve заключается в том, что в рассматриваемом примере базисные неизвестные выбираются единственным образом, хотя в качестве базисных неизвестных можно выбрать любую другую пару неизвестных, т.к. в рассматриваемом примере все миноры второго порядка основной матрицы системы отличны от нуля.

Обойти проблему можно, применяя предлагаемый наиболее близкий к класси-

ческому исследованию и решению СЛАУ алгоритм.

Ввести основную матрицу СЛАУ, обозначив ее A , например. В задаче исследовать СЛАУ на совместность задать расширенную матрицу системы $A1$.

Ввести столбец свободных членов, обозначив его, например, B .

Найти ранг основной матрицы системы: $\text{rank}(A)$. Для СЛАУ больших размеров найти $\text{rank}(A1)$. Если $\text{rank}(A) \neq \text{rank}(A1)$, СЛАУ несовместна, т.е. решений не имеет, и на этом исследование и решение СЛАУ заканчивается.

Если $\text{rank}(A) = \text{rank}(A1)$, выбрать отличный от нуля базисный минор F (порядок базисного минора равен рангу основной матрицы СЛАУ) и базисные неизвестные, коэффициенты при которых вошли в базисный минор.

Оставшиеся свободные неизвестные перенести к свободным членам и ввести получившийся столбец C как функцию свободных неизвестных.

Получить общее решение, умножив обратную матрицу F^{-1} на матрицу C .

Присвоив свободным неизвестным числовые значения, получить соответствующее частное решение.

Для проверки надо матрицу A умножить на матрицу-столбец $B1$ решения, составленного из свободных и базисных неизвестных или из значений неизвестных частного решения.

Применение алгоритма рассмотрим на предыдущем примере

$$\begin{cases} t + 3u + 5v = -1, \\ 2t + 4u + 6v = -2. \end{cases}$$

$$1. A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad 2. B := \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$3. \text{rank}(A) = 2$$

4. Выберем базисными неизвестными t и v . Тогда

$$F := \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Определитель матрицы F отличен от нуля: $|F| = 2$.

5. Составим матрицу C :

$$C(u) := \begin{bmatrix} -1 - 3u \\ -2 - 4u \end{bmatrix}.$$

6. Получим общее решение

$$F^{-1} \cdot C(u) \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \cdot u - 1 \\ -\frac{1}{2} \cdot u \end{bmatrix}.$$

7. Пусть свободная неизвестная

$$u := -\frac{1}{3}.$$

При этом значения базисных неизвестных t и v получатся умножением

$$F^{-1} \cdot C(u) \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

8. Составим столбец

$$B1(u) := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \cdot u - 1 \\ u \\ -\frac{1}{2} \cdot u \end{bmatrix}.$$

$$\text{Тогда } A \cdot B1(u) \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

или сделаем проверку для частного решения:

$$B2 := \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\text{и получим } A \cdot B2 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Преимущества предлагаемого алгоритма заключаются в том, что решение СЛАУ осуществляется не формально, когда возвращается единственный вариант ответа. В процессе реализации алгоритма исследуются основные свойства СЛАУ: ранги основной и расширенной матриц системы, выбираются базисные неизвестные и свободные неизвестные, возвращаются общие решения при любом допустимом наборе базисных и свободных неизвестных. Заменяя столбцы основной матрицы СЛАУ столбцом свободных членов со свободными неиз-

вестными, можно получать общее решение и методом Крамера, о чём в учебной литературе упоминаний нет. Вот как это можно осуществить для СЛАУ

$$\begin{cases} t + 3u + 5v = -1, \\ 2t + 4u + 6v = -2, \end{cases}$$

решенной выше матричным методом:

$$t(u) := \frac{\begin{bmatrix} -3u - 1 & 5 \\ -4u - 2 & 6 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}} \rightarrow \frac{-1}{2} \cdot u - 1;$$

$$v(u) := \frac{\begin{bmatrix} 1 & -3u - 1 \\ 2 & -4u - 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}} \rightarrow \frac{-1}{2} \cdot u.$$

Таким образом, методом Крамера получено общее решение A^{-1} .

Список литературы

1. Кафедра высшей математики ТПУ. URL: <http://portal.tpu.ru/departments/kafedra/vm/rabota/>
2. Очков В.Ф. Mathcad 14 для студентов и инженеров: русская версия. – СПб.: БХВ-Петербург, 2009. – 512 с.: ил.