УДК 519.852

НЕЧЕТКОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ФИНАНСИРОВАНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ, МАКСИМИЗИРУЮЩЕЙ ПОЛУЧАЕМЫЙ ПРЕДПРИЯТИЕМ ДОХОД

Шаталова А.Ю., Лебедев К.А.

ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный университет», Краснодар, e-mail: al.shatalova@yandex.ru

Математическая формулировка целевой функции и ограничений в задачах оптимизации инвестиционных проектов обычно включает различные экономические показатели, значение которых зависят от многих факторов. Общим недостатком имеющихся показателей эффективности инвестиционных проектов является требование определенности входных данных, которая достигается путем применения средневзвешенных значений входных параметров, что, может привести к получению значительно смещенных точечных оценок показателей эффективности и риска инвестиционных проектов. Попытка сделать модель более представительной путем введения дополнительных связей делает ее громоздкой и аналитически неразрешимой.

Ключевые слова: инвестиционные проекты, линейное программирование, оптимизация, доход, анализ

FUZZY LINEAR PROGRAMMING IN THE OPTIMAL FINANCING OF INVESTMENT PROJECTS THAT MAXIMIZE THE RECEIVED ENTERPRISE INCOME

Shatalova A.Yu., Lebedev K.A.

Kuban state University, Krasnodar, e-mail: al.shatalova@yandex.ru

The mathematical formulation of the objective function and constraints in the optimization problems of investment projects typically includes various economic indicators, the value of which depend on many factors. A common drawback of existing indicators of efficiency of investment projects is the requirement of certainty of the input data, which is achieved by applying a weighted average of values of input parameters that may lead to significantly biased point estimates of efficacy and risk of investment projects. Attempt to make the model more representative by introducing additional relations makes it cumbersome and analytically intractable.

Keywords: investment projects, linear programming, optimization, revenue analysis

Очевидно, что требование детерминированности входных данных является неоправданным упрощением реальности, так любой инвестиционный проект характеризуется множеством факторов неопределенности [6].

Теория нечетких множеств позволяет более детально интерпретировать результаты наблюдений, полученных опытным путем, т.к. дает исследователю основания для анализа неоднородных и недостаточных выборок, которые классическая теория вероятности законно игнорирует [7].

В [4] предложен альтернативный подход, базирующийся на включении в модель описания экспертного понимания природы этих параметров в нечеткой форме. Автор предлагает рассматривать входящие параметры как нечеткие числа с соответствующим инструментарием их анализа.

Используя этот подход и описанную модель [1–3], в данной статье приводятся расчеты задачи оптимального финансирования инвестиционных проектов, позволяющей максимизировать получаемый предприятием доход с использованием параметров в форме нечетких множеств.

Задача оптимального финансирования инвестиционных проектов, позволяющая максимизировать получаемый предприятием доход

Дадим ряд определений, используемых в данной работе [4].

Опр. Нечеткое подмножество A множества X – это семейство подмножеств $A_\alpha \subseteq X$ где $\alpha \in$ в $[0,1]$, обладающее следующими свойствами:

1. $A_0 = X$ обладающее следующими,
2. $A_\alpha \subseteq X$, если $0 \le \alpha < \beta \le 1$,
3. $A_\beta = \bigcup\limits_{0\le\alpha<\beta} A_\alpha$.

Нечеткое подмножество A множества X называется нечетким множеством.

Нечёткое множество A задаётся посредством функции принадлежности. Значение есть число, лежащее между 0 и 1, показывающее степень принадлежности элемента x нечёткому множеству A [5].

Опр. Пусть $A = \{A_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ – нечеткое подмножество из X. Функция определяемая как

$\mu_\alpha : \tilde{O} \to [0,1]$, определяемая как:

$$\mu_\alpha(x) = \sup\{a \,/\, a \in [0,1]\ \ x \in A_\alpha\},$$

называется функцией принадлежности, а ее значения $\mu_\alpha(x)$ степенью принадлежности x нечеткому множеству A.

Равенство $\mu_\alpha(x) = 1$ означает, что x точно принадлежит множеству А; равенство $\mu_\alpha(x) = 0$ говорит о том, что x точно не принадлежит множеству А. Т. о. нечёткие множества отличаются от обычных множеств тем, что допускают промежуточные степени принадлежности, например, $\mu_\alpha(x)=0{,}5$.

Далее мы будем предполагать, что нечёткое множество A нормировано, т.е. существует такой элемент x, что $\mu_\alpha(x)=1$.

Для любого числа α, 0<α≤1 α-срезом нечёткого множества A называется подмножество $A^\alpha=\{x\in X/\mu_\alpha(x)\geq\alpha\}$. 1-срез называют ядром нечёткого множества A. Заметим, что нечёткое множество однозначно восстанавливается по своим срезам.

Когда $X=R$ – множество вещественных чисел, говорят о нечётких числах. Для практических вычислений удобно работать с треугольными числами.

Пусть, $a=(a_L,\ a_C,\ a_R)$ – треугольное нечеткое число и $a_L<a_C<a_R$, где a_L – называется левым значением числа a, a_C – средним, а a_R – правым значением числа a. Тогда функция принадлежности задается выражением:

$$\mu_\alpha(t)=\max\{0,\min\{\frac{t-a_L}{a_C-a_L},\frac{a_R-t}{a_R-a_C}\}\qquad (1)$$

Примечание: любое действительное число можно представить в виде нечеткого, при условии, что $a_L=a_C=a_R$

Нечёткие числа можно складывать, вычитать, умножать и делить, как и обычные числа [4]. Операции на нечётких числах определяются посредством следующего принципа расширения: Пусть $c=f(a,b)$ – произвольная числовая функция, например, функция сложения $f(a,b)=a+b$. Тогда значение $C=f(A,B)$ этой функции на нечётких числах A и B имеет функцию принадлежности, вычисляемую по следующей формуле:

$$\mu_C(x)=\sup_{(x,\,y):z=f(x,y)}\min(\mu_A(x)\ \mu_B(x)$$

В этом случае α-срезы нечёткого множества C имеют вид:

$$C^\alpha=\{c=f(a,b)/a\in A^\alpha, b\in B^\alpha\}$$

Применяя принцип расширения к арифметическим операциям и трапециевидным нечётким числам, мы получим следующие правила сложения и вычитания:

(aL, aC, aR)+ (bL, bC, bR)=
(aL+ bL, aC+ bC, aR+ bR).

Рассмотрим случай, когда предприятие рассматривает различные инвестиционные проекты. Через 7 месяцев ему необходимо получить доход размером в 2 000 000 рублей, при этом возвратность кредита через 3 месяца должна составить 900 000 долларов [1-3]. Процент прибыли по каждому из проектов четко не определен и представим в виде треугольных нечетких чисел.

Задача состоит в том, чтобы найти стратегию максимизации величины ресурсов в конце данного семилетнего периода. Эта задача оптимального инвестирования может быть сформулирована как задача нечеткого линейного программирования с целевой функцией:

$$c_1x_1+c_2x_2+(1+u_7)p_7\to\max \qquad (2)$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+p_1=2,\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+(1+u_1)p_1-p_2=0,\\
&a_{31}x_1+a_{32}x_2+(1+u_2)p_2-p_3=0{,}9,\\
&a_{41}x_1+a_{42}x_2+(1+u_3)p_3-p_4=0,\\
&a_{51}x_1+a_{52}x_2+(1+u_4)p_4-p_5=0,\\
&a_{61}x_1+a_{62}\ +(1+u_5)p_5-p_6=0,\\
&a_{71}x_1+a_{72}x_2+(1+u_6)p_6-p_7=0,\\
&x_1,x_2,p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6,p_7\geq 0,
\end{aligned}\qquad (3)$$

где ci – нечеткий доход от i-го проекта, $i=\overline{1,2}$, в j-ом году, $j=\overline{1,7}$; aij – нечеткий доход/затраты от i-го проекта, $i=\overline{1,2}$, в j-ом году, $j=\overline{1,7}$; ui – нечеткая процентная ставка в j-ом году, $j=\overline{1,7}$; xi – мера участия в i-ом проекте, $i=\overline{1,2}$; pj – распределение ресурсов в j-ом году, $j=\overline{1,7}$; «+» – расширенное сложение [4]; «=» – отношение нечеткого равенства.

Будем предполагать, что рассмотренные параметры являются треугольными нечеткими числами следующего вида:

c_1=(4,6,8),	a_{41}=(7,8,9),	u_1=(0,001;0,002; 0,003),
c_2=(3,5,7),	a_{42}=(6,10,14),	u_2=(0,001;0,002; 0,003),
a_{11}=(6,10,14),	a_{51}=(3,5,7),	u_3=(0,001;0,003; 0,005),
a_{12}=(3,6,9),	a_{52}=(8,9,10),	u_4=(0,002;0,004; 0,006),
a_{21}=(-4,-2,0),	a_{61}=(6,11,16),	u_5=(0,001;0,004; 0,007),
a_{22}=(1,2,3),	a_{62}=(7,10,13),	u_6=(0,003;0,004; 0,005).
a_{31}=(6,8,10),	a_{71}=(6,8,10),	
a_{32}=(6,12,18),	a_{72}=(3,5,7),	

Пусть $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$, исключая случай $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, т.е. исключается ситуация, при которой инвестор не участвует ни в одном проекте.

По принципу расширения левые части ограничений (2), являются треугольными нечеткими числами следующего вида [4]:

$$L_1 = (6x_1 + 3x_2 + p_1,\ 10x_1 + 6x_2 + p_1,\ 14x_1 + 9x_2 + p_1),$$
$$L_2 = (-4x_1 + x_2 + 1{,}01p_1 - p_2,\ -2x_1 + 2x_2 + 1{,}02p_1 - p_2,\ 3x_2 + 1{,}03p_1 - p_2),$$
$$L_3 = (6x_1 + 6x_2 + 1{,}01p_2 - p_3,\ 8x_1 + 12x_2 + 1{,}02p_2 - p_3,\ 10x_1 + 18x_2 + 1{,}03p_2 - p_3),$$
$$L_4 = (7x_1 + 6x_2 + 1{,}01p_3 - p_4,\ 8x_1 + 10x_2 + 1{,}02p_3 - p_4,\ 9x_1 + 14x_2 + 1{,}03p_3 - p_4),$$
$$L_5 = (3x_1 + 8x_2 + 1{,}02p_4 - p_5,\ 5x_1 + 9x_2 + 1{,}04p_4 - p_5,\ 7x_1 + 10x_2 + 1{,}06p_4 - p_5),$$
$$L_6 = (6x_1 + 7x_2 + 1{,}01p_5 - p_6,\ 11x_1 + 10x_2 + 1{,}04p_5 - p_6,\ 16x_1 + 13x_2 + 1{,}07p_5 - p_6),$$
$$L_7 = (6x_1 + 3x_2 + 1{,}03p_6 - p_7,\ 8x_1 + 5x_2 + 1{,}04p_6 - p_7,\ 10x_1 + 7x_2 + 1{,}05p_6 - p_7).$$

Применяя (1) вычислим функции принадлежности для $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7$:

$$L_1 = (6x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 6x_4 + p_1,\ 10x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 10x_4 + p_1,\ 14x_1 + 9x_2 + 14x_3 + 14x_4 + p_1),$$

$$\mu_{L_1}(t) = \max\{0, \min\{\frac{t - 6x_1 - 3x_2 - p_1}{4x_1 + 3x_2}, \frac{14x_1 + 9x_2 + p_1 - t}{4x_1 + 3x_2}\}\}$$

$$\mu_{L_2}(t) = \max\{0, \min\{\frac{t + 4x_1 - x_2 - 1{,}01p_1 + p_2}{2x_1 - x_2 + 0{,}01p_1}, \frac{3x_2 + 1{,}03p_1 - p_2 - t}{2x_1 + x_2 + 0{,}01p_1}\}\}$$

$$\mu_{L_3}(t) = \max\{0, \min\{\frac{t - 6x_1 - 6x_2 - 0{,}01p_2 + p_3}{2x_1 + 6x_2 + 0{,}01p_2}, \frac{10x_1 + 18x_2 + 1{,}03p_2 - p_3 - t}{2x_1 + 6x_2 + 0{,}01p_2}\}\}$$

$$\mu_{L_4}(t) = \max\{0, \min\{\frac{t - 7x_1 - 6x_2 - 1{,}01p_3 + p_4}{x_1 + 4x_2 + 0{,}01p_3}, \frac{9x_1 + 14x_2 + 1{,}03p_3 - p_4 - t}{x_1 + 4x_2 + 0{,}01p_3}\}\}$$

$$\mu_{L_5}(t) = \max\{0, \min\{\frac{t - 3x_1 - 8x_2 - 1{,}02p_4 + p_5}{2x_1 + x_2 + 0{,}02p_4}, \frac{7x_1 + 10x_2 + 1{,}06p_4 - p_5 - t}{2x_1 + x_2 + 0{,}02p_4}\}\}$$

$$\mu_{L_6}(t) = \max\{0, \min\{\frac{t - 6x_1 - 7x_2 - 1{,}01p_5 + p_6}{5x_1 + 3x_2 + 0{,}03p_5}, \frac{16x_1 + 13x_2 + 1{,}07p_5 - p_6 - t}{5x_1 + 3x_2 + 0{,}03p_5}\}\}$$

$$\mu_{L_7}(t) = \max\{0, \min\{\frac{t - 6x_1 - 3x_2 - 1{,}03p_6 + p_7}{2x_1 + 2x_2 + 0{,}01p_6}, \frac{10x_1 + 7x_2 + 1{,}05p_6 - p_7 - t}{2x_1 + 2x_2 + 0{,}01p_6}\}\}$$

Допустимое решение задачи нечеткого линейного программирования (3) является нечетким множеством, определенным функции принадлежности:

$$\mu_X(x_1, x_2, p_1, p_2, p_3) = \min\{\mu_{L_1}(2), \mu_{L_2}(0), \mu_{L_3}(0{,}9), \mu_{L_4}(0), \mu_{L_5}(0), \mu_{L_6}(0), \mu_{L_7}(0),\}$$

Используя методику [4] найдем допустимые решения задачи:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + p_1 = 2,$$
$$a_2 x_1 + a_2 x_2 + (1 + u_1)p_1 - p_2 = 0,$$
$$a_3 x_1 + a_3 x_2 + (1 + u_2)p_2 - p_3 = 0{,}9,$$
$$a_4 x_1 + a_4 x_2 + (1 + u_3)p_3 - p_4 = 0, \quad (4)$$
$$a_5 x_1 + a_5 x_2 + (1 + u_4)p_4 - p_5 = 0,$$
$$a_6 x_1 + a_6 + (1 + u_5)p_5 - p_6 = 0,$$
$$a_7 x_1 + a_2 x_2 + (1 + u_6)p_6 - p_7 = 0,$$
$$x_1, x_2 \leq 1,$$
$$x_1, x_2, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7 \geq 0,$$

Удовлетворяющее решение будет иметь вид:

$$\mu_Z(t) = \max\{0, \min\{\frac{t - 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 6x_4 + p_1}{67x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 6x_4 + p_1}, \frac{14x_1 + 9x_2 + 14x_3 + 14x_4 + p - t}{11x_1 + 9x_2 + 14x_3 + 14x_4 + p}\}\}$$

Чтобы найти max-удовлетворяющее решение это множество векторов $x^* = (x_1, x_2, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, \alpha)$, для которых выполняется условие (4).

Применение пакета Microsoft Office Solver позволило вычислить следующее оптимальное решение задачи (2)-(3).

Таким образом, формулировка задачи нечеткого линейного программирования позволяет находить оптимальное решение в условиях неопределенности параметров модели, а так же дает учитывать различные требования.

$$x_1 = 0{,}605,\ \ x_2 = 1,\ \ p_1 = 0,\ \ p_2 = 0{,}811,\ \ p_3 = 17{,}741,\ \ p_4 = 0,\ \ p_5 = 0,\ \ p_6 = 0,\ \ p_7 = 0, \alpha = 0.99.$$

Список литературы

1. Семенчин Е.А. Обобщенная математическая модель инвестирования предприятий с учетом рисков / Е.А. Семенчин, А.Ю. Шаталова // Фундаментальные исследования. – 2011. № 12 (часть 1). С. 228-232.

2. Семенчин Е.А. Математическая модель максимизации прибыли, получаемой банком за счет реализации инвестиционных проектов / Е.А. Семенчин, А.Ю. Шаталова / / Фундаментальные исследования. 2012. № 6 (часть 1). С. 258–262.

3. Семенчин Е.А. Инвестиционный портфель с переменным объемом фонда инвестирования / Е.А. Семенчин, А. Ю. Шаталова // Фундаментальные исследования. 2012. № 9. С. 739-744.

4. Фидлер М. Задачи линейной оптимизации с неточными данными // Фидлер М., Недома Й., Рамик Я., Рон И., Циммерманн К. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. 288 с.

5. Аньшин В.М. Применение теории нечётких множеств к задаче формирования портфеля проектов // В.М. Аньшин, И.В. Демкин, И.Н. Царьков, И.М. Никонов, 2013.

6. Чернов В.Г. Анализ инвестиционных проектов на основе нечетких множеств второго порядка // В.Г. Чернов, Ремезова Е.М., Соколова А. // Владимирский государственный университет, 2014.

7. Недосекин А.О. Нечетко-множественный анализ риска фондовых инвестиций // А.О. Недосекин. Санкт-Петербург, 2002.