УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СТОЯЧИХ УПРУГИХ ВОЛН В БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЕ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ В ВИДЕ ТРЕУГОЛЬНОГО ИМПУЛЬСА

Мусаев В.К.

МГМУ, Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Приводится некоторая информация моделирования упругих волн напряжений в бесконечной полосе при воздействии в виде треугольного импульса. Задача решается с помощью численного моделирования нестационарных динамических уравнений теории упругости. Отраженные волны от свободных поверхностей бесконечной полосы создают физическую картину стоячих волн. Для решения двумерной нестационарной динамической задачи математической теории упругости с начальными и граничными условиями используем метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Применяется однородный алгоритм. С помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями привели к линейной задаче Коши. Показаны компоненты нормальных напряжений в характерной области исследуемой задачи.

Ключевые слова: нестационарные волны, численный метод, перемещение, скорость перемещений, ускорение, напряжение, теория упругости, краевая задача, задача с начальными условиями, задача Коши, методика, алгоритм, комплекс программ, однородный алгоритм, импульсное воздействие, треугольный импульс, бесконечная полоса, стоячая волна

MODELING OF UNSTEADY STANDING ELASTIC WAVES IN AN INFINITE STRIP WHEN SUBJECTED TO A TRIANGULAR PULSE

Musayev V.K.

MSMU, Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Provides a bit of information modelling of elastic stress waves in an infinite strip when subjected to a triangular pulse. The task is solved by means of numerical simulation of unsteady dynamic equations of elasticity theory. Reflected waves from free surface of an endless band provide a physical picture of the standing waves. For the solution of two-dimensional nonstationary dynamic problems of the mathematical theory of elasticity with initial and boundary conditions using the finite element method in movements. The problem is solved by a method of capturing, without isolation gaps. Applied homogeneous algorithm. Using the finite element method in displacements, a linear problem with initial and boundary conditions lead to a linear Cauchy problem. Shows the components of the normal stresses in the characteristic region of the investigated problem.

Keywords: transient waves, numerical method, displacement, velocity, displacement, acceleration, strain, elasticity theory, boundary value problem, the problem with the initial conditions, the Cauchy problem, method, algorithm, complex programs, the homogeneous algorithm, the current pulse, triangular pulse, an infinite strip, a standing wave

О численном методе, алгоритме и комплексе программ моделирования волн напряжений

В работах [1–10] приведена информация о нестационарных волнах напряжений в сложных деформируемых телах.

При динамическом и импульсном воздействии в сооружении распространяются волны напряжений.

Для решения задачи о моделировании нестационарных упругих волн в деформируемых областях сложной формы рассмотрим некоторое тело Г в прямоугольной декартовой системе координат XOY, которому в начальный момент времени $t = 0$ сообщается механическое воздействие. Предположим, что тело Г изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях.

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$
$$(x, y) \in \Gamma,$$
$$\sigma_x = \rho C_p^2 \varepsilon_x + \rho (C_p^2 - 2C_s^2)\, \varepsilon_y,$$
$$\sigma_y = \rho C_p^2 \varepsilon_y + \rho (C_p^2 - 2C_s^2)\, \varepsilon_x,\ \tau_{xy} = \rho C_s^2 \gamma_{xy},$$
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},\ (x, y) \in (\Gamma \cup S), \qquad (1)$$

где σ_x, σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора упругих напряжений;
ε_x, ε_y и γ_{xy} – компоненты тензора упругих деформаций;
u и v – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей OX и OY соответственно;
ρ – плотность материала;
$C_p = \sqrt{\dfrac{E}{\rho(1 - \nu^2)}}$ – скорость продольной упругой волны;

$C_s = \sqrt{\dfrac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ – скорость поперечной упругой волны;
ν – коэффициент Пуассона;
E – модуль упругости;
$S\ (S_1 \cup S_2)$ – граничный контур тела Г.

Систему (1) в области, занимаемой телом Г, следует интегрировать при начальных и граничных условиях.

Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями – используем метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Чтобы выполнить динамический расчет методом конечных элементов, нужно иметь матрицу жесткости и матрицу инерции конечного элемента.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела Г, записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\overline{\mathrm{H}}\ddot{\vec{\Phi}} + \overline{\mathrm{K}}\vec{\Phi} = \vec{\mathrm{R}},\ \vec{\Phi}\Big|_{t=0} = \vec{\Phi}_0,\ \dot{\vec{\Phi}}\Big|_{t=0} = \dot{\vec{\Phi}}_0, \quad (2)$$

где $\overline{\mathrm{H}}$ – матрица инерции;
$\overline{\mathrm{K}}$ – матрица жесткости;
$\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений;
$\dot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений;
$\ddot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений;
$\vec{\mathrm{R}}$ – вектор узловых упругих внешних сил.

Соотношение (2) система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями.

Таким образом, с помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями привели к линейной задаче Коши (2).

Для интегрирования уравнения (2) конечноэлементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду

$$\overline{\mathrm{H}}\frac{d}{dt}\dot{\vec{\Phi}} + \overline{\mathrm{K}}\vec{\Phi} = \vec{\mathrm{R}},\ \frac{d}{dt}\vec{\Phi} = \dot{\vec{\Phi}}. \quad (3)$$

Интегрируя по временной координате соотношение (3) с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\dot{\vec{\Phi}}_{i+1} = \dot{\vec{\Phi}}_i + \Delta t\overline{\mathrm{H}}^{-1}(-\overline{\mathrm{K}}\vec{\Phi}_i + \vec{\mathrm{R}}_i),$$

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t\dot{\vec{\Phi}}_{i+1}. \quad (4)$$

где Δt – шаг по временной координате.

Система уравнений (2) для внутренних и граничных узловых точек, полученная в результате интегрирования уравнения движения теории упругости, должна давать решение, сходящееся к решению исходной системы (1).

Шаг по временной переменной Δt определяем из следующего соотношения

$$\Delta t = k\frac{\min \Delta l_i}{C_p}\ \ (i = 1,\ 2,\ 3,\ ...), \quad (5)$$

где Δl – длина стороны конечного элемента.

Результаты численного эксперимента показали, что при $k = 0{,}5$ обеспечивается устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы.

Некоторая информация о физической достоверности и математической точности моделирования нестационарных волн напряжений в деформируемых телах с помощью рассматриваемого численного метода, алгоритма и комплекса программ приведена в следующих работах [1–2, 4–6, 8, 10].

Решение задачи о воздействии плоской продольной упругой волны в виде треугольного импульса на бесконечную полосу

Рассмотрим задачу о воздействии плоской продольной упругой волны в виде треугольного импульса (рис. 1) на бесконечную полосу (рис. 2).

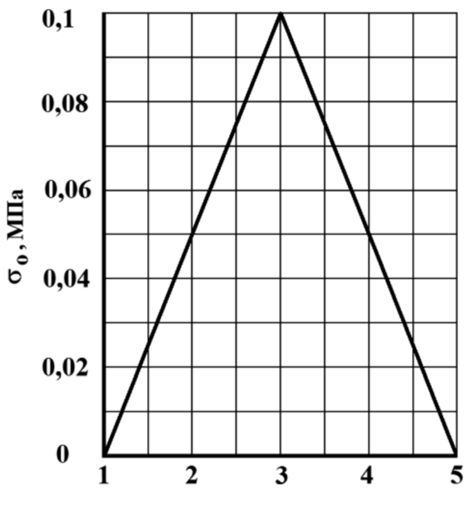

Рис. 1. Воздействие в виде треугольного импульса

На границе пластинки AB (рис. 2) приложено нормальное напряжение σ_y (рис. 1), которое при $1 \le n \le 3$ ($n = t/\Delta t$) изменяется линейно от 0 до P, а при $3 \le n \ge 5$ от P

до 0 ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = -0{,}1$ МПа). Граничные условия для контуров BC и AD при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контуров BC и AD не доходят до исследуемых точек. Контур CD свободен от нагрузок. Исследуемая расчетная область имеет 4002 узловые точки. Решается система уравнений из 16008 неизвестных.

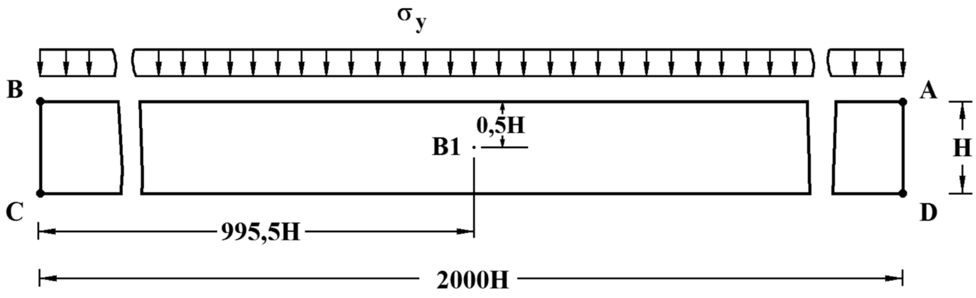

Рис. 2. Постановка задачи о стоячих волнах в бесконечной полосе

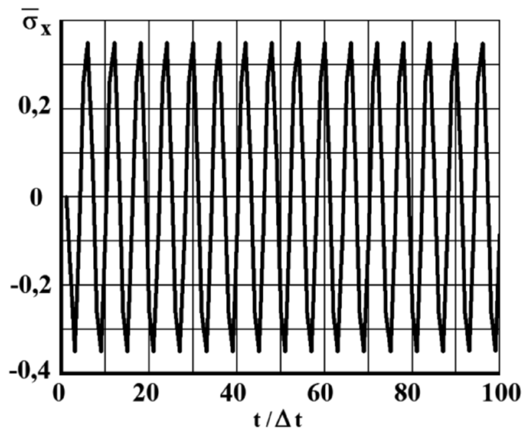

Рис. 3. Нормальное напряжение $\bar{\sigma}_x$ во времени $0 \le n \le 100$ в точке B1

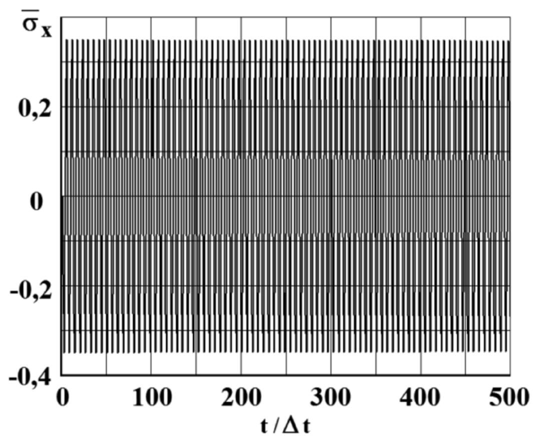

Рис. 4. Нормальное напряжение $\bar{\sigma}_x$ во времени $0 \le n \le 500$ в точке B1

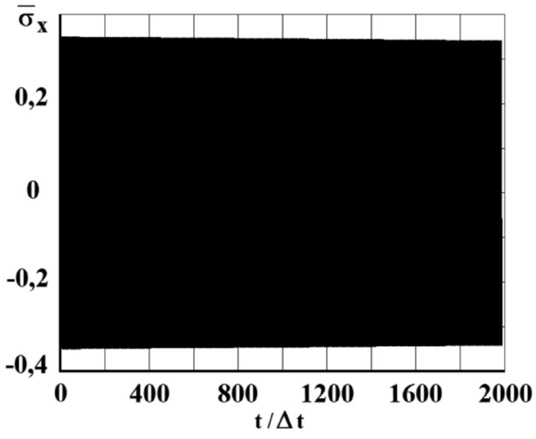

Рис. 5. Нормальное напряжение $\bar{\sigma}_x$ во времени $0 \le n \le 1990$ в точке B1

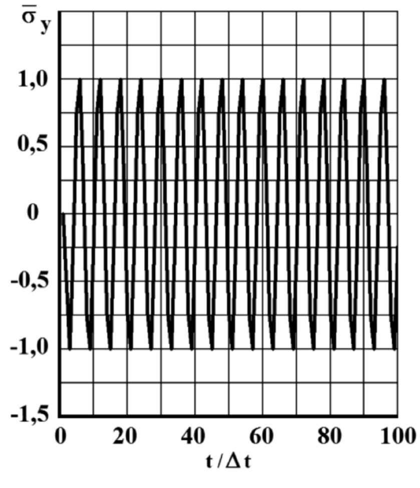

Рис. 6. Нормальное напряжение $\bar{\sigma}_y$ во времени $0 \le n \le 100$ в точке B1

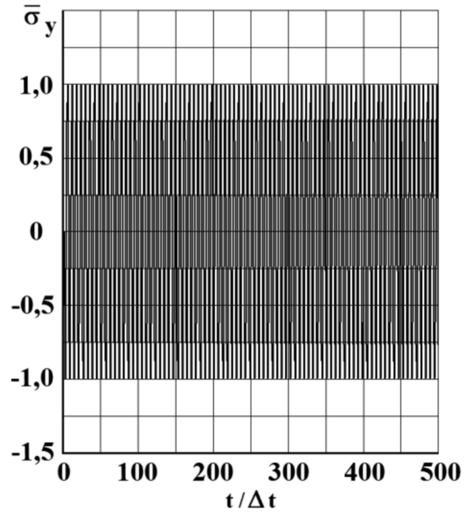

Рис. 7. Нормальное напряжение $\bar{\sigma}_y$ во времени $0 \le n \le 500$ в точке B1

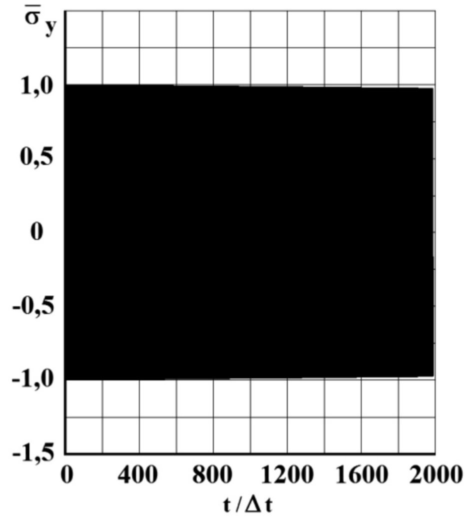

Рис. 8. Нормальное напряжение $\bar{\sigma}_y$ во времени $0 \le n \le 1990$ в точке B1

Для примера на рис. 3–5 представлено изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_x$ ($\bar{\sigma}_x = \sigma_x / |\sigma_0|$) во времени n в точке $B1$.

Для примера на рис. 6–8 представлено изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ ($\bar{\sigma}_y = \sigma_y / |\sigma_0|$) во времени n в точке $B1$.

Получены нормальные напряжения в характерной области бесконечной полосы. Отраженные волны от свободных поверхностей бесконечной полосы создают физическую картину стоячих волн.

Список литературы

1. Мусаев В.К. Численное моделирование динамического напряженного состояния сооружений уравнениями двумерной теории упругости и пластичности. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 01.02.04. – М.: Совинтервод, 1993. – 46 с.

2. Мусаев В.К. Численное решение волновых задач теории упругости и пластичности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия прикладная математика и информатика. – 1997. – № 1. – С. 87–110.

3. Мусаев В.К. Математическое моделирование упругих волн напряжений в сложных деформируемых телах // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 1. – С. 62–76.

4. Мусаев В.К. Об оценке достоверности и точности численного решения нестационарных динамических задач // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 3. – С. 48–60.

5. Мусаев В.К. Оценка достоверности и точности результатов вычислительного эксперимента при решении задач нестационарной волновой теории упругости // Научный журнал проблем комплексной безопасности. – 2009. – № 1. – С. 55–80.

6. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11. – С. 10–14.

7. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 12 (1). – С. 28–32.

8. Мусаев В.К. Оценка точности и достоверности численного моделирования при решении задач об отражении и интерференции нестационарных упругих волн напряжений // Успехи современного естествознания. – 2015. – № 1 (часть 7). – С. 1184–1187.

9. Musayev V.K. Modeling of non-stationary of stress waves in solid deformable bodies complex area // International Journal Of Applied And Fundamental Research. – 2014. – № 2; URL: www.science-sd.com/457-24639.

10. Musayev V.K. Estimation of accuracy of the results of numerical simulation of unsteady wave of the stress in deformable objects of complex shape // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2015. – Volume 11, Issue 1. – P. 135–146.