УДК 624.131+539.215

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ УПЛОТНЕНИЯ УПРУГОПОЛЗУЧИХ ГРУНТОВ

[2]Дасибеков А., [1]Юнусов А.А., [2]Айменов Ж.Т., [3]Юнусова А.А., [2]Такибаева Г.А.

[1]Южно-казахстанский государственный университет им. М. Ауэзова, Шымкент, e-mail: Yunusov1951@mail.ru;
[2]Международный гуманитарно-технический университет, Шымкент;
[3]Евразийский гуманитарный институт, Астана, e-mail: altyn_79@mail.ru

Замена линейного закона нелинейными зависимостями между напряжениями и деформациями составляет сущность физической нелинейности. Решением таких вопросов впервые занимался еще В.А.Флорин [1], один из основоположников механики грунтов. Он в своих работах, пользуясь уравнениями нелинейной теории ползучести, предложенной Н.Х. Арутюняном [2] дает основное уравнение одномерной консолидации, описывающее процесс уплотнения земляной среды с учетом старения и ползучести грунта. Получил решение для частного случая, когда уплотнение слоя грунта происходит под действием равномерно распределенной нагрузки. Получены расчетные формулы для вычисления суммы главных напряжений, изменения поровых давлений и осадок уплотняемого слоя грунта для любого момента времени.

Ключевые слова: оценка, уравнение в интегральной форме, процесс ,уплотнение, грунт, прямоугольник, давление, основание, фундамент, граничные условия

NONLINEAR PROBLEMS OF COMPACTION ELASTICALLY REPENS SOIL

[1]Dasibekov A., [2]Yunusov A.A., [1]Aymenov Z.T., [3]Yunusova A.A., [2]Takibaeva G.A.

[1]M. Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent city, e-mail: Yunusov1951@mail.ru;
[2]International gumj-technical universiny, Shymkent;
[3]Eurasian Institute for the Humanities, Astana, e-mail: altyn_79@mail.ru

Replacement linear law non-linear relationships between stresses and strains is the essence of physical nonlinearity. To address these issues for the first time engaged in a V.A. Florin [1], one of the founders of soil mechanics. In his works, using the equations of nonlinear creep theory proposed by N.X. Harutyunyan [2] gives the basic equation of one-dimensional consolidation, describing the process of compaction of earth environment based on the ageing and creep of soil. Received the decision for a particular case, when the seal layer of the soil occurs under the action of uniformly distributed load. Formulas for computing the sum of the principal stresses, changes in pore pressure and the residue compacted layer of soil for any moment of time.

Keywords: estimation, equation in the integral form, process, compaction, soil, rectangle, pressure, basis, Foundation, boundary conditions

В настоящее время существует много различных решений задач консолидации земляных масс, полученные методами линейной механики уплотняемых сред, Однако они дают возможность оценить напряженно-деформированное состояние уплотняемого массива грунта только для небольших диапазонов напряжений. В действительности же, форма и размеры оснований сооружений при определенных нагрузках существенно изменяются, и принцип малости перемещений становится неприемлемым, т.е. линейный закон между напряжениями и деформациями уплотняемых сред перестает соблюдаться и он заменяется нелинейной зависимостью.

Замена линейного закона нелинейными зависимостями между напряжениями и деформациями составляет сущность физической нелинейности. Решением таких вопросов впервые занимался еще В.А. Флорин [6], один из основоположников механики грунтов. Он в своих работах, пользуясь уравнениями нелинейной теории ползучести, предложенной Н.Х. Арутюняном [1] дает основное уравнение одномерной консолидации, описывающее процесс уплотнения земляной среды с учетом старения и ползучести грунта. Получил решение для частного случая, когда уплотнение слоя грунта происходит под действием равномерно распределенной нагрузки.

Продолжая эту идею, в данной работе исследован процесс уплотнения упругоползучих земляных масс в двумерной постановке. При этом выведено уравнение уплотнения многофазных грунтов. Здесь зависимость между коэффициентом пористости и суммой главных напряжений принята в виде

$$\varepsilon(x,y,t)=\varepsilon(\tau_1)-\frac{a_0}{1+\xi}\theta(x,y,t)+\frac{1}{1+\xi}\int_{\tau_1}^{r}\theta(x,y,\tau)\frac{\partial a_0(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau+$$

$$+\frac{1}{1+\xi}\int_{\tau_1}^{r}f[\theta(x,y,\tau)]\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau, \quad (1)$$

где

$$C(t,\tau)=a_1[1-e^{-\gamma_1(t-\tau)}]; \quad (2)$$

$\varepsilon(t),\theta(t)$ – эти функции также изменяются по координатам *x,y*; $f[\theta(\tau)]$ – функция, характеризующая нелинейную зависимость между коэффициентом пористости $\varepsilon(t)$ и суммой главных напряжений $\theta(t)$ в скелете грунта; a_1,γ_1 – параметры ползучести; τ_1 – момент приложения внешней нагрузки; ξ – коэффициент бокового давления; a_0 – коэффициент сжимаемости грунта; $C(t,\tau)$ – мера ползучести.

Причем выражение (1) является нелинейным и оно составлено на основе нелинейной теории ползучести. В этом уравнении фигурирует величина $f[\theta(\tau)]$, являющаяся нелинейной функцией напряжения. Для выражения $f[\theta(\tau)]$ обычно принимают степенную зависимость. Наиболее общая степенная функция $f[\theta(\tau)]$ может иметь вид

$$f[\theta(t)]=\theta(t)+\rho\theta^m(t). \quad (3)$$

Выражение (3) используем далее при составлении окончательного выражения, определяющего вид основного уравнения рассматриваемого вопроса.

Уравнение уплотнения без учета ползучести относительно напряжений, согласно [6], имеет вид:

$$-\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\frac{\beta^{/}\left(1+\varepsilon_{cp}\right)}{2}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{k\left(1+\varepsilon_{cp}\right)}{2\gamma_{\hat{a}}}\nabla^2\theta, \quad (4)$$

где

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

ρ – малый параметр; $\beta^{/}$ – коэффициент объемного сжатия; γ – объемный вес воды; ε_{cp} – средний коэффициент пористости; *k* – коэффициент фильтрации.

Выражения (1), (2) и (3) подставив в (4), находим

$$A_0\frac{\partial}{\partial t}\theta(x,y,t)-f\left[\theta(x,y,t)\right]\cdot\frac{\partial C(\tau,t)}{\partial\tau}\Big|_{t=\tau}-\int_{\tau_1}^{t}f\left[\theta(x,y,\tau)\right]\frac{\partial^2 C(\tau,t)}{\partial\tau\partial t}d\tau=C_{2V}\nabla^2\theta(x,y,t), \quad (5)$$

где

$$A_0=a_0+\frac{1}{2}\beta^{/}\left(1+\varepsilon_{cp}\right)\left(1+\xi\right);$$

$$C_{2V}=\frac{1}{2\gamma_{\hat{a}}}k\left(1+\varepsilon_{cp}\right)\left(1+\xi\right). \quad (6)$$

Полученное уравнение (5) при (6) дает возможность определить сумму главных напряжений в уплотняемом грунте, который обладает нелинейной ползучестью. Однако для определения искомой функции $\theta\left(x,y,t\right)$, кроме граничных условий необходимо быть задано начальное условие. Оно имеет вид:

$$\theta\left(\tau_1\right)=2\gamma\left(1-\frac{1}{\omega_0^1}\right)H_0, \quad (7)$$

где H_0 – напорная функция для начального момента времени.

Таким образом, исследуемая задача сводится к решению уравнения (5), решение которого удовлетворяет начальному (7) и заданным граничным условиям.

В инженерной практике большой интерес представляет задача уплотнения земляной среды конечной мощности. В связи с этим рассмотрим уплотнение двухфазной среды с водоупором на глубине h ограниченной с боков водонепроницаемыми стенками, и находящейся под равномерно распределенной нагрузкой *q* на участке (–*a*, *a*), приложенной в момент времени τ_1. Граничными условиями этой задачи относительно суммы главных напряжений будут:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}\Big|_{x=\pm l}=0;\ \frac{\partial\theta}{\partial y}\Big|_{y=0}=0;$$

$$\theta\Big|_{y=h}=2q,-a\angle x\angle a;$$

$$\theta\Big|_{y-h}=0,-l\angle x\angle -a,a\angle x\angle l. \qquad (8)$$

Следовательно, требуется определить решение уравнения (5), удовлетворяющие граничным (8) и начальному (7) условиям.

Ввиду наличия малого параметра ρ в основном нелинейном уравнений (5), решение его представим в виде бесконечного ряда, т.е.

$$\theta(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}W_k(x,y,t)\rho^k, \qquad (9)$$

где $W_k(x,y,t)$ – некоторая непрерывная функция, подлежащая определению.

Подставляя (9) и (2) в (5) и приравнивая коэффициентов при одинаковых степенях ρ, получим следующую систему реккурентных интегро-дифференциальных уравнений:

$$A_0\frac{\partial}{\partial t}W_k(x,y,t)+a_1\gamma_1W_k(x,y,t)-$$

$$-a_1\gamma_1^2\int_{\tau_1}^{t}W_k(x,y,\tau)e^{-\gamma_1(t-\tau)}d\tau=$$

$$=C_V\nabla^2W_k(x,y,t)+F_k,k=0,1,2,... \qquad (10)$$

$$F_0=W_0^2;\ F_k=\frac{1}{kW_0}\sum_{n=1}^{\infty}(nm-k+n)W_nF_{k-n}$$

при $m\geq 1$.

Решив систему интегро-дифференциальных уравнений (10) находим все неизвестные функций $W_k(x,y,t)$. Их, подставив в (9) определим сумму главных напряжении. Причем функция $W_0(x,y,t)$ вычисляется по формуле

$$W_0(x,y,t)=\frac{2aq}{l}+4q\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i\pi a}{l}}{i\pi ch\frac{i\pi h}{l}}\cos\frac{i\pi}{l}xch\frac{i\pi}{l}y+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}T_{ij}^{(0)}(t)\cos\frac{i\pi}{l}x\cos\frac{(2j+1)\pi}{2h}y, \qquad (11)$$

где функции $T_{ij}^{(0)}(t)$ имеют вид:

$$T_{ij}^{(0)}(t)=\frac{4q}{\omega_{/0}h^2}\sum_{k=1}^{2}a_{kij}e^{-r_{kij}(t-\tau)}. \qquad (12)$$

Здесь

$$a_{kij}=\frac{(-1)^j(2j+1)\pi}{\lambda_{ij}^2(r_{2ij}-r_{1ij})}\cdot\frac{\sin\frac{i\pi a}{l}}{i\pi}\left\{B\left(1-\omega_0^{/}\right)+C_{2V}\lambda_{ij}^2+\left[1+\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2\frac{\omega_0^{/}}{\lambda_{ij}^2}\right]r_{3-k,ij}\right\}.$$

$$\lambda_{ij}^2=\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2+\left[\frac{(2j+1)\pi}{2h}\right]^2.$$

Функция $W_1(x,y,t)$, удовлетворяющая граничным и начальному условиям задачи имеет вид:

$$W_1(x,y,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}T_{ij}^{(1)}(t)\cos\frac{i\pi}{l}x\cos\frac{(2j+1)\pi}{2h}y, \qquad (13)$$

где

$$T_{ij}^{(1)}(t)=\frac{1}{r_{2ij}-r_{1ij}}\left\{Q_{ij}^{(1)}(t)\sum_{k=1}^{2}(-1)^k e^{-r_{kij}(t-\tau)}+\int_{\tau_1}^{t}\left[\frac{\partial Q_{ij}^{(1)}(\tau)}{\partial\tau}+\gamma_1Q_{ij}^{(1)}(\tau)\right]\sum_{k=1}^{2}(-1)^k e^{-r_{kij}(t-\tau)}d\tau\right\}. \qquad (14)$$

r_{kij} – корни характеристического уравнения вида

$$r^2+\left(A_0+C_{2v}\lambda_{ij}^2\right)r+C_{2v}\lambda_{ij}^2\gamma_1=0.$$

Функция $Q_{ij}^{(1)}(t)$ в (14) определяется из следующего выражения

$$Q_{ij}^{(1)}(t)=\frac{4}{lh}\int\limits_0^l\int\limits_0^h[A_0\gamma_1\int\limits_{\tau_1}^t W_0^m(\tau)e^{-\gamma_1(t-\tau)}d\tau-C_{2v}W_0^m]\cos\frac{i\pi}{l}x\cos\frac{(2j+1)\pi}{2h}ydxdy\,.$$

Аналогичным методом можно будет решить и другие краевые задачи. В частности, функция $W_n(x,y,t)$ имеет следующий вид:

$$W_n(x,y,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}T_{ij}^{(n)}(t)\cos\frac{i\pi}{l}x\cos\frac{(2j+1)\pi}{2h}y\,, \tag{15}$$

где

$$T_{ij}^{(n)}(t)=\frac{1}{r_{2ij}-r_{1ij}}\left\{Q_{ij}^{(n)}(t)\sum_{k=1}^{2}(-1)^k e^{-r_{kij}(t-\tau)}+\int\limits_{\tau_1}^t[\frac{\partial Q_{ij}^{(n)}(\tau)}{\partial\tau}+\gamma_1Q_{ij}^{(n)}(\tau)]\sum_{k=1}^{2}(-1)^k e^{-r_{kij}(t-\tau)}d\tau\right\};$$

$$Q_{ij}^{(n)}(t)=\frac{4}{lh}\int\limits_0^l\int\limits_0^h[A_0\gamma_1\int\limits_{\tau_1}^t V_n(\tau)e^{-\gamma_1(t-\tau)}d\tau-C_{2v}V_n]\cos\frac{i\pi}{l}x\cos\frac{(2j+1)\pi}{2h}ydxdy\,.$$

После определения всех $W_n(x,y,t)$ сумму главных напряжений, согласно (9) и (11)-(15) вычисляем по формуле

$$\theta(x,y,t)=\frac{2aq}{l}+4q\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i\pi a}{l}}{i\pi ch\frac{i\pi h}{l}}\cos\frac{i\pi}{l}xch\frac{i\pi}{l}y+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\rho^kT_{ij}^{(k)}(t)\cos\frac{i\pi}{l}x\cos\frac{(2j+1)\pi}{2h}y\,. \tag{16}$$

Тогда изменения порового давления во времени и пространственных координат имеет вид

$$\eth(x,y,t)=\sum_{\hat{e}=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\rho^kT_{ij}^{(k)}(t)\cos\frac{i\pi}{l}x\cos\frac{(2j+1)\pi}{2h}y\,. \tag{17}$$

Вертикальные перемещения верхней поверхности уплотняемого массива или так называемое осадок слоя грунта при нелинейной его ползучести можно будет определить из следующего выражения:

$$S(t)=\frac{1}{(1+\varepsilon_0)(1+\xi)}\int\limits_0^h\{a_0\theta(x,y,\tau)-\int\limits_{\tau_1}^t\theta(x,y,\tau)\frac{\partial a_0}{\partial\tau}d\tau-$$

$$-\int\limits_{\tau_1}^t\left[\theta(x,y,\tau)+\theta^m(x,y,\tau)\right]\frac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\}d\tau\,. \tag{18}$$

Используя соотношения (11)–(15) и (18) находим осадку уплотняемого массива

$$S(t)=\frac{1}{(1+\varepsilon_0)(1+\xi)}[a_0u_{\text{перв}}+a_1\left(u_{\text{вт}}^{\text{лин}}+u_{\text{вт}}^{\text{нел}}\right)], \tag{19}$$

где

$$u_{\text{перв}}=\int\limits_0^h\theta(x,y,t)dy;\;\; u_{\text{вт}}^{\text{лин}}=\int\limits_0^h\int\limits_{\tau_1}^t\gamma_1\theta(x,y,\tau)e^{-\gamma_1(t-\tau_1)}dy;\;\; u_{\text{вт}}^{\text{нел}}=\int\limits_0^h\int\limits_{\tau_1}^t\rho\gamma_1\theta^m(x,y,\tau)d\tau dy.$$

Таким образом, зная соотношения (12), (17) и (19) имеем возможность вычислить сумму главных напряжений, изменение порового давления и осадок уплотняемого слоя грунта для любого момента времени в каждой его точке.

Следует заметить, если в выражении (3) принять малый параметр $\rho = 0$, то получим $f[\theta(t)] = \theta(t)$. Это выражение соответствует линейной зависимости между напряжениями и деформациями ползучести. С другой стороны, деформации ползучести грунта являются линейными функциями напряжений только в том случае, если напряжения составляет достаточно малую часть предела прочности грунта. Если напряжения в грунте превосходит эту величину, появляется нелинейная зависимость. Для практического использования можно принять $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$, тогда имеет место стационарная нелинейная ползучесть.

Следует заметить, что подобные задачи в другой постановке исследованы в [2-3].

Список литературы

1. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. – М.: Гостехтеориздат, 1952. –323 с.

2. Дасибеков А. Юнусов А.А., Юнусова А.А., АбжапбаровА.А. Физичекая нелинейность в консолидации грунтов // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – №8, ч. 1. – С. 47-52.

3. Дасибеков А., Юнусов А.А., Айменов Ж.Т., Юнусова А.А., Саржанова М.Ж. Неоднородность грунтов в основании фундаментов как основная причина повреждений зданий // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – №3. – С. 23-27

4. Месчян С.Р. Ползучесть глинистых грунтов. – Ереван: Изд-во АН Арм. ССР,1967, 316 с.

5. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. – М.: Изд. МГУ, 1976. – С. 7–205.

6. Флорин В.А. Основы механики грунтов.– М.: Госстройиздат, 1961. – 543 с.