

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗРЫВНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРУГИХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОЛОСТЬЮ (СОТНОШЕНИЕ ШИРИНЫ К ВЫСОТЕ ОДИН К ВОСЬМИ)

Мусаев В.К.

Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II, Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

В работе приводится некоторая информация моделирования безопасности упругой полуплоскости при нестационарном волновом взрывном воздействии с помощью метода конечных элементов. Рассматривается волновая теория взрывной безопасности. Применяется техническое средство в виде вертикальных прямоугольных полостей для увеличения безопасности объекта при сосредоточенном взрывном воздействии. Для решения двумерной нестационарной динамической задачи математической теории упругости с начальными и граничными условиями используем метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Применяется однородный алгоритм. С помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями привели к линейной задаче Коши. Получена явная двухслойная схема. Рассмотрена постановка задачи с полостью (соотношение ширины к высоте один к восьми) в полуплоскости при воздействии в виде дельта функции. Решается система уравнений из 59048 неизвестных. Взрывное воздействие моделируется в виде треугольного импульса. В четырех точках приводится изменение контурного напряжения.

Ключевые слова: численное моделирование, численный метод, алгоритм Мусаева В.К., комплекс программ, метод, нестационарные упругие волны, динамика сплошных сред, волновая теория взрывной безопасности, физическая точность, математическая достоверность, фундаментальное воздействие, метод Галеркина, распространение волн, вертикальные прямоугольные полости, полуплоскость, неотражающие граничные условия, исследуемая расчетная область, дельта функция

MODELING OF THE EXPLOSIVE NON-STATIONARY ELASTIC STRESS WAVES IN ELASTIC HALF PLANE WITH A VERTICAL RECTANGULAR CAVITY (RATIO OF WIDTH TO HEIGHT OF ONE TO EIGHT)

Musayev V.K.

Moscow state transport University of Emperor Nicholas II, Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

The paper provides some information modeling safety elastic half plane in the case of non-stationary wave explosive impact using the finite element method. Considered the wave theory of explosive safety. Applicable technical tool in the form of vertical rectangular cavities to increase the security of the object by focusing the explosive effect. For solving two-dimensional nonstationary dynamic problems of mathematical elasticity theory with initial and boundary conditions we use the method of finite elements in displacements. The problem is solved by the method of end-to-end account, without allocation of breaks. Applies a uniform algorithm. Using the method of finite elements in displacements, a linear problem with initial and boundary conditions led to a linear Cauchy problem. The explicit two-layer scheme. Reviewed the problem statement with the cavity (ratio of width to height of one to eight) in the half-plane when exposed in the form of Delta functions. Solve the system of equations of 59048 unknown. Explosive impact is modeled as a triangular pulse. Four points is the change in the grid voltages.

Keywords: numerical simulation, numerical method, algorithm Musayev V.K., complex programs, a method of non-stationary elastic waves, dynamics of continuous media, wave theory's, explosive safety, physical accuracy, mathematical accuracy, and fundamental effects, the method of Galerkin, wave propagation, vertical rectangular cavity, the half-plane, non-reflecting boundary conditions, studied the computational domain, the Delta function

Рассматриваются вопросы численного моделирования взрывного воздействия на упругую полуплоскость с полостью (соотношение ширины к высоте один к восьми). Поставленная задача решается с помощью численного моделирования уравнений нестационарной математической теории упругости.

Расчеты проводились при следующих единицах измерения: килограмм-сила (кгс); сантиметр (см); секунда (с). Для перехода в другие единицы измерения были приняты

следующие допущения: $1 \text{ кгс/см}^2 \approx 0,1 \text{ МПа}$; $1 \text{ кгс с}^2/\text{см}^4 \approx 10^9 \text{ кг/м}^3$.

Постановка задачи при нестационарных взрывных воздействиях

Волны напряжений различной природы, распространяясь, в деформируемом теле взаимодействуют, друг с другом, что приводит к образованию новых областей возмущений, перераспределению напряжений и деформаций. При интерференции волн напряжений их интенсивности складываются.

Они могут достигать значений, превосходящих предел прочности материала. В этом случае наступает разрушение материала. После трехкратного или четырехкратного прохождения и отражения волн напряжений в теле процесс распространения возмущений становится установившимся, напряжения и деформации усредняются, тело находится в колебательном движении.

Некоторые вопросы в области моделирования нестационарных динамических задач с помощью применяемого метода, алгоритма и комплекса программ рассмотрены в следующих работах [1–10].

В работах [3, 5–7, 10] приведена информация о физической достоверности и математической точности моделирования нестационарных волн напряжений в деформируемых телах с помощью рассматриваемого численного метода, алгоритма и комплекса программ.

Для решения задачи о моделировании упругих нестационарных волн напряжений в областях сложной формы рассмотрим некоторое тело Γ в прямоугольной декартовой системе координат XOY , которому в начальный момент времени $t = 0$ сообщается механическое нестационарное импульсное воздействие. Предположим, что тело Γ изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях.

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial Y} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial Y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ (x, y) &\in \Gamma, \\ \sigma_x &= \rho C_p^2 \varepsilon_x + \rho (C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_y, \\ \sigma_y &= \rho C_p^2 \varepsilon_y + \rho (C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_x, \\ \tau_{xy} &= \rho C_s^2 \gamma_{xy} \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial X}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial Y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X}, \\ (x, y) &\in (\Gamma \cup S), \end{aligned} \quad (1)$$

где σ_x , σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора упругих напряжений; ε_x , ε_y и γ_{xy} – компоненты тензора упругих деформаций; u и v – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей OX и OY соответственно;

ρ – плотность материала; $C_p = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ –

скорость продольной упругой волны;

$C_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ – скорость поперечной

упругой волны; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; $S (S_1 \cup S_2)$ – граничный контур тела Γ .

Систему (1) в области, занимаемой телом Γ , следует интегрировать при начальных и граничных условиях.

Разработка методики и алгоритма

Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями (1) используем метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела Γ , записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\begin{aligned} \bar{H} \ddot{\vec{\Phi}} + \bar{K} \vec{\Phi} &= \bar{R}, \quad \vec{\Phi}|_{t=0} = \vec{\Phi}_0, \\ \dot{\vec{\Phi}}|_{t=0} &= \dot{\vec{\Phi}}_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где \bar{H} – диагональная матрица инерции; \bar{K} – матрица жесткости; $\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; \bar{R} – вектор внешних узловых упругих сил.

Соотношение (2) система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями. Таким образом, с помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями (1) привели к линейной задаче Коши (2).

Для интегрирования уравнения (2) конечноэлементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду

$$\bar{H} \frac{d}{dt} \dot{\vec{\Phi}} + \bar{K} \vec{\Phi} = \bar{R}, \quad \frac{d}{dt} \vec{\Phi} = \dot{\vec{\Phi}}. \quad (3)$$

Интегрируя по временной координате соотношение (3) с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\dot{\vec{\Phi}}_{i+1} = \dot{\vec{\Phi}}_i + \Delta t \bar{H}^{-1} (-\bar{K} \vec{\Phi}_i + \bar{R}_i),$$

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t \vec{\Phi}_{i+1}. \quad (4)$$

Основные соотношения метода конечных элементов в перемещениях получены с помощью принципа возможных перемещений и конечноэлементного варианта метода Галеркина.

Определим отношение шагов по временной координате Δt и по пространственным координатам, а именно

$$\Delta t = 0,5 \frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i = 1, 2, 3, \dots), \quad (5)$$

где Δl – длина стороны конечного элемента.

О моделировании взрывной волны в упругой полуплоскости с полостью

Рассмотрим задачу о воздействии сосредоточенной взрывной волны на свободной поверхности упругой полуплоскости с полостью (соотношение ширины к высоте один к восьми) (рис. 1).

В точке F перпендикулярно свободной поверхности $ABEFG$ приложено сосредоточенное нормальное напряжение σ_y (рис. 1), которое при $0 \leq n \leq 10$ ($n = t / \Delta t$) изменяется линейно от 0 до P , а при $10 \leq n \leq 20$ от P до 0 ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = -1$ МПа (-1 кгс/см²)).

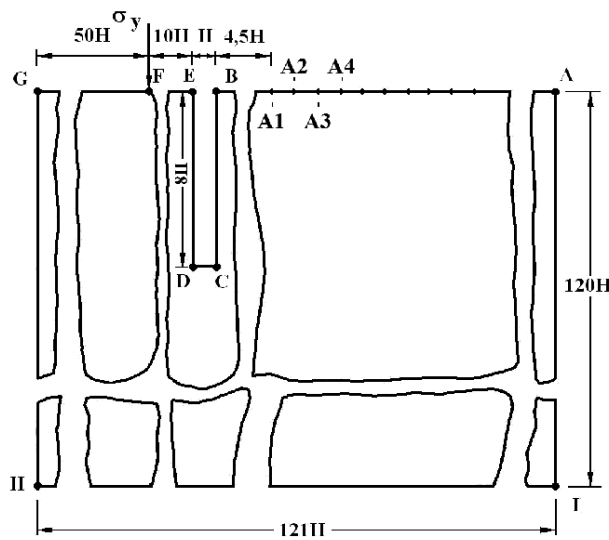


Рис. 1. Постановка задачи о воздействии сосредоточенной взрывной волны на свободной поверхности упругой полуплоскости с полостью (соотношение ширины к высоте один к восьми)

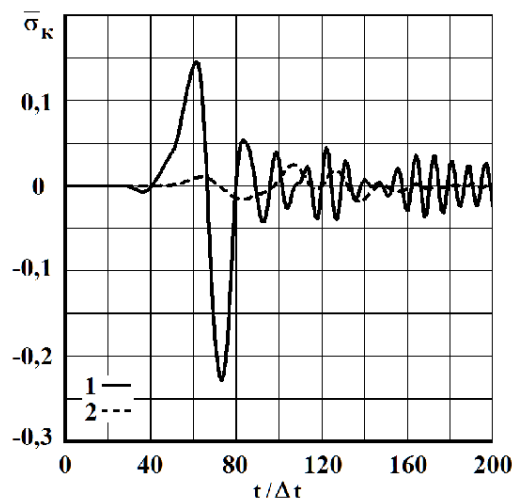


Рис. 2. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t / \Delta t$ в точке $A1$: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к восьми)

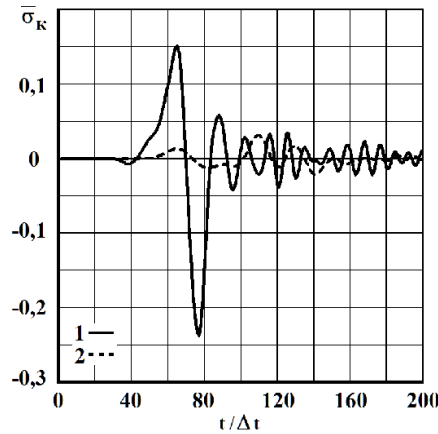


Рис. 3. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t / \Delta t$ в точке A2: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к восьми)

Граничные условия для контура $GHIA$ при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура $GHIA$ не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 200$. Контур $ABCDEFG$ свободен от нагрузок, кроме точки F , где приложено сосредоточенное упругое нормальное напряжение σ_y .

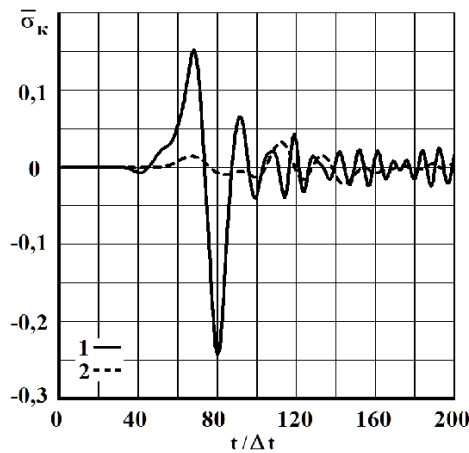


Рис. 4. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t / \Delta t$ в точке A3: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к восьми)

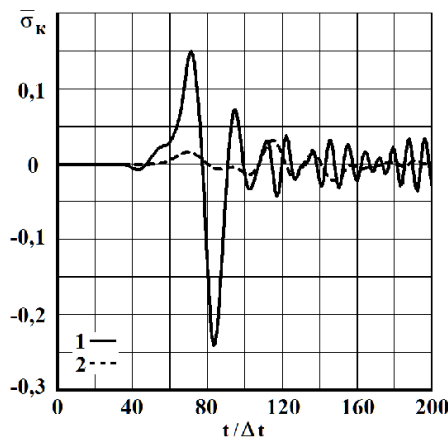


Рис. 5. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени $t / \Delta t$ в точке A4: 1 – в задаче без полости; 2 – в задаче с полостью (соотношение ширины к высоте один к восьми)

Расчеты проведены при следующих исходных данных: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 1,393 \cdot 10^{-6}$ с; $E = 3,15 \cdot 10^4$ МПа ($3,15 \cdot 10^5$ кгс/см²); $\nu = 0,2$; $\rho = 0,255 \cdot 10^4$ кг/м³ ($0,255 \cdot 10^{-5}$ кгс с²/см⁴); $C_p = 3587$ м/с; $C_s = 2269$ м/с. Решается система уравнений из 59048 неизвестных.

Результаты расчетов для контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ ($\bar{\sigma}_k = \sigma_k / |\sigma_0|$) во времени n получены в точках A1–A4 (рис. 1), находящихся на свободной поверхности упругой полуплоскости (расстояние между точками: A1 и A2 равно H ; A2 и A3 равно H ; A3 и A4 равно H). На рис. 2–5 приведены контурные напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точках A1–A4 во времени n .

Список литературы

1. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 12 (1). – С. 28–32.
2. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемой среде на поверхности полуплоскости при взрывном воздействии в объекте хранения опасных веществ // Успехи современного естествознания. – 2015. – № 1 (часть 1). – С. 84–87.
3. Мусаев В.К. Оценка точности и достоверности численного моделирования при решении задач об отражении и интерференции нестационарных упругих волн напряжений // Успехи современного естествознания. – 2015. – № 1 (часть 7). – С. 1184–1187.
4. Мусаев В.К. Численное моделирование вертикального сосредоточенного упругого импульсного воздействия в виде дельта функции на границе воздушной и твердой среды с полостью в виде прямоугольника (соотношение ширины к высоте один к пятнадцати) // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 2 (часть 2). – С. 220–223.
5. Мусаев В.К. Численное решение задачи о распространении нестационарных упругих волн напряжений в подкрепленном круглом отверстии // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 2. – С. 93–97.
6. Мусаев В.К. Решение задачи о распространении плоских продольных волн в виде импульсного воздействия // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 4 (часть 2). – С. 326–330.
7. Мусаев В.К. Исследования устойчивости явной двухслойной линейной конечноэлементной схемы для внутренних узловых точек на равномерной прямоугольной сетке // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 5. – С. 39–42.
8. Мусаев В.К. Решение задачи о сосредоточенном упругом взрывном воздействии в виде дельта функции на набережной речного порта с заполненным водным объектом на 25% // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 4. – С. 52–55.
9. Мусаев В.К. Математическое моделирование поверхностных волн напряжений в задаче Лэмба при воздействии в виде функции Хевисайда // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 5 (часть 1). – С. 38–41.
10. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных стоячих упругих волн в бесконечной полосе при воздействии в виде треугольного импульса // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 11 (часть 2). – С. 248–251.