

УДК 539.3

ОЦЕНКА ФИЗИЧЕСКОЙ ДОСТОВЕРНОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЛОСКИХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРУГИХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В ВИДЕ ИМПУЛЬСНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ (ФУНКЦИЯ ХЕВИСАЙДА) В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Мусаев В.К.

Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II, Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Приводится некоторая информация о моделировании плоских нестационарных упругих волн в упругой полуплоскости. Для решения поставленной задачи применяется волновое уравнение механики деформируемого твердого тела. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны методика, алгоритм и комплекс программ для решения линейных динамических задач теории упругости. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений. Линейная динамическая задача с начальными и граничными условиями с помощью метода конечных элементов в перемещениях приведена к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями. Получена явная двухслойная схема. При решении сложных задач возникают проблемы оценки достоверности полученных результатов. В работе рассматривается оценка точности и достоверности результатов численного моделирования волн напряжений при распространении плоской нестационарной упругой волны в полуплоскости. В качестве воздействия применяется функция Хевисайда. Решается система уравнений из 59048 неизвестных.

Ключевые слова: вычислительная физика, техносферная безопасность, численный метод Мусаева В.К., алгоритм, комплекс программ, метод, нестационарные упругие волны, плоская продольная волна, физика и механика динамики сплошных сред, фундаментальное воздействие, распространение волн, исследуемая расчетная область, функция Хевисайда, математическая точность, физическая достоверность, верификация численного метода

EVALUATION OF THE PHYSICAL ACCURACY AND MATHEMATICAL PRECISION IN THE NUMERICAL SIMULATION OF PLANE TRANSIENT ELASTIC STRESS WAVES IN A PULSED EXPOSURE (HEAVISIDE FUNCTION) IN THE HALF PLANE

Musayev V.K.

Moscow state transport University of Emperor Nicholas II, Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Is some information about the modeling of a flat non-stationary elastic waves in an elastic half-plane. To solve this problem apply the wave equation mechanics of deformable solids. On the basis of the finite element method in displacements the developed method, algorithm and program complex for the solution of linear dynamic problems of the elasticity theory. Basic relations of the finite element method obtained by using the principle of possible displacements. Linear dynamic problem with initial and boundary conditions using the finite element method in displacements given to the system of linear ordinary differential equations with initial conditions. The explicit two-layer scheme. When complex tasks arise problems of estimation of reliability of the results. This paper considers the evaluation of the accuracy and reliability of results of numerical simulation of stress waves in the propagation of plane elastic nonstationary waves in a half-plane. As exposure to apply the function of Heaviside. Solve the system of equations of 59048 unknown.

Keywords: computational physics technosphere safety, numerical method Musayev V.K., algorithm, program system, method, unsteady elastic waves, a flat longitudinal wave, physics and mechanics of the dynamics of continuous media, fundamental impact, wave propagation, investigated the computational domain, the function of Heaviside, mathematical accuracy, physical correctness, the verification of the numerical method

Расчеты проводились при следующих единицах измерения: килограмм-сила (кгс); сантиметр (см); секунда (с). Для перехода в другие единицы измерения были приняты следующие допущения: $1 \text{ кгс/см}^2 \approx 0,1 \text{ МПа}$; $1 \text{ кгс с}^2/\text{см}^4 \approx 10^9 \text{ кг/м}^3$.

Некоторая информация о моделировании нестационарных волн напряжений в деформируемых телах различной формы приведена в работах [1–10].

В работах [1, 3–4, 7–8] приведена информация о физической достоверности и ма-

тематической точности рассматриваемого численного метода, алгоритма и комплекса программ.

Приводится информация о численном моделировании нестационарных упругих плоских волн напряжений в упругой полуплоскости.

Для оценки физической достоверности и математической точности применяется численное моделирование. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны методика, алгоритм и ком-

плекс программ для решения линейных двумерных плоских задач динамической теории упругости. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений. Задачи решаются методом сквозного счета, без выделения разрывов. Исследуемая область по пространственным переменным разбивается на треугольные конечные элементы с тремя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений и на прямоугольные конечные элементы с четырьмя узловыми точками с билинейной аппроксимацией упругих перемещений. По временной переменной исследуемая область разбивается на линейные конечные элементы с двумя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений. За основные неизвестные в узле конечного элемента приняты два перемещения и две скорости перемещений. Задача с начальными условиями с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина приведена к явной двухслойной схеме.

Рассмотрим задачу о воздействии плоской продольной волны в виде функции Хевисайда (рис. 2) на упругую полуплоскость (рис. 1).

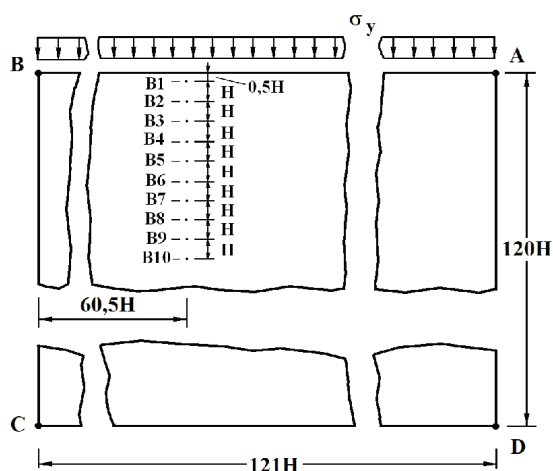


Рис. 1. Постановка задачи о распространении плоских продольных нестационарных упругих волн в полуплоскости

На границе полуплоскости AB приложено нормальное напряжение σ_y , которое при $0 \leq n \leq 10$ ($n = t / \Delta t$) изменяется линейно от 0 до P , а при $n \geq 10$ равно P ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = -0,1$ МПа (-1 кгс/см²)). Граничные условия для контура $BCDA$ при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура $BCDA$ не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 100$. Расчеты проведены при следующих исходных

данных: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 1,393 \cdot 10^{-6}$ с; $E = 3,15 \cdot 10^4$ МПа ($3,15 \cdot 10^5$ кгс/см²); $\nu = 0,2$; $\rho = 0,255 \cdot 10^4$ кг/м³ ($0,255 \cdot 10^{-5}$ кгс·с²/см⁴); $C = 3587$ м/с; $C_s = 2269$ м/с. Решается система уравнений из 59048 неизвестных.

На рис. 3–12 представлено изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ ($\bar{\sigma}_y = \sigma_y / |\sigma_0|$) во времени n в точках $B1-B10$: 1 – численное решение; 2 – аналитическое решение.

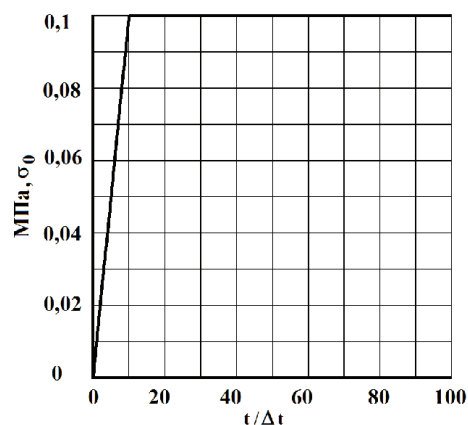


Рис. 2. Воздействие типа функции Хевисайда

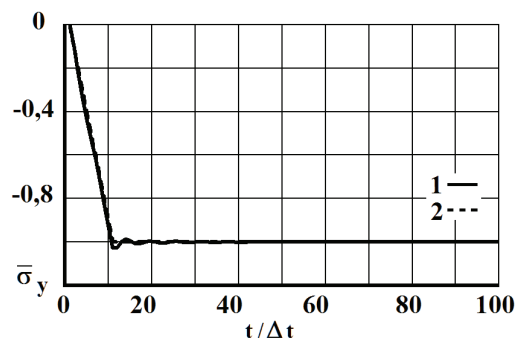


Рис. 3. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ во времени $t / \Delta t$ в точке $B1$: 1 – численное решение; 2 – аналитическое решение

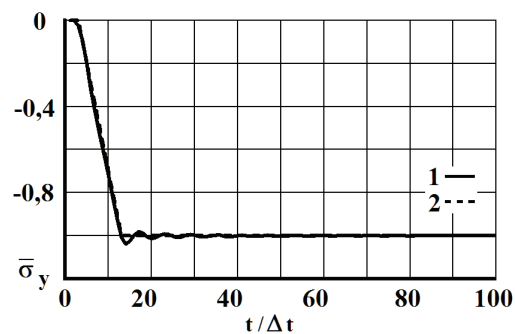


Рис. 4. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ во времени $t / \Delta t$ в точке $B2$: 1 – численное решение; 2 – аналитическое решение

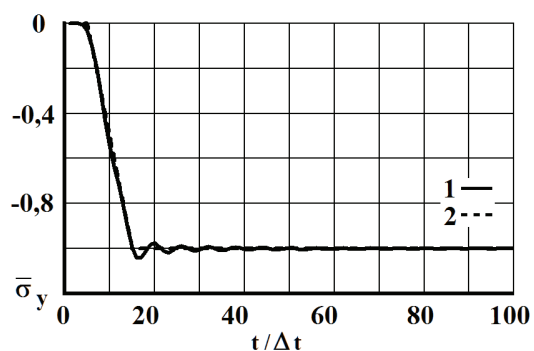


Рис. 5. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ во времени $t / \Delta t$ в точке B3: 1 – численное решение; 2 – аналитическое решение

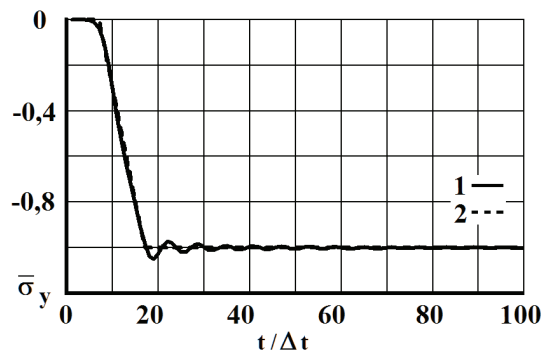


Рис. 6. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ во времени $t / \Delta t$ в точке B4: 1 – численное решение; 2 – аналитическое решение

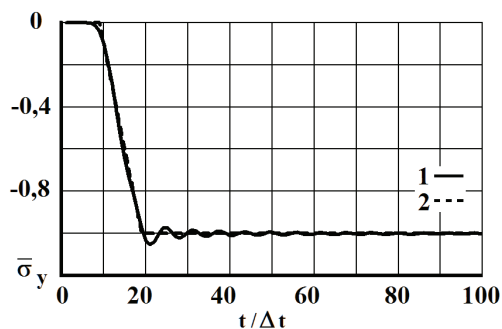


Рис. 7. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ во времени $t / \Delta t$ в точке B5: 1 – численное решение; 2 – аналитическое решение

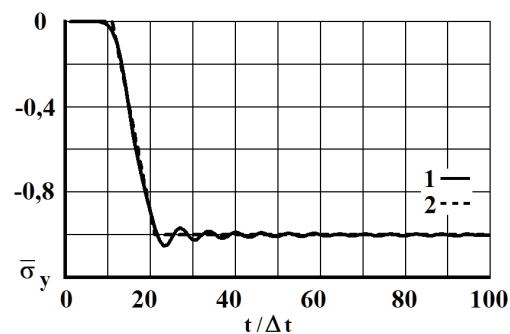


Рис. 8. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ во времени $t / \Delta t$ в точке B6: 1 – численное решение; 2 – аналитическое решение

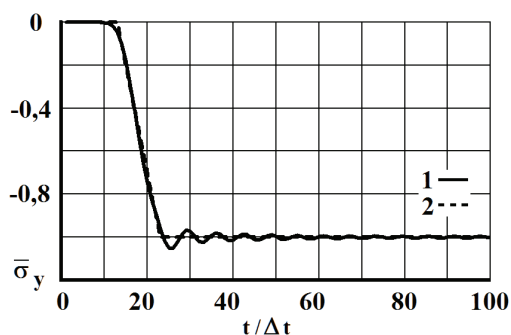


Рис. 9. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ во времени $t / \Delta t$ в точке B7: 1 – численное решение; 2 – аналитическое решение

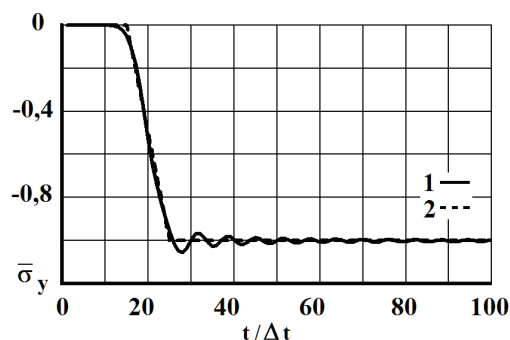


Рис. 10. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ во времени $t / \Delta t$ в точке B8: 1 – численное решение; 2 – аналитическое решение

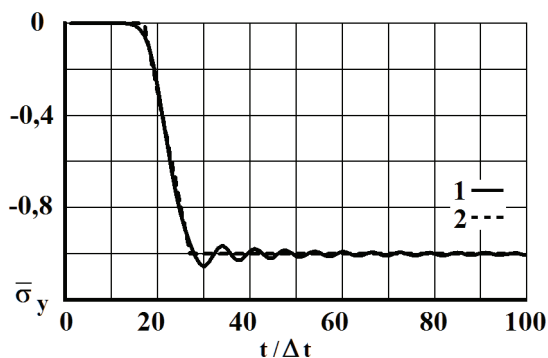


Рис. 11. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ во времени $t/\Delta t$ в точке B9: 1 – численное решение; 2 – аналитическое решение

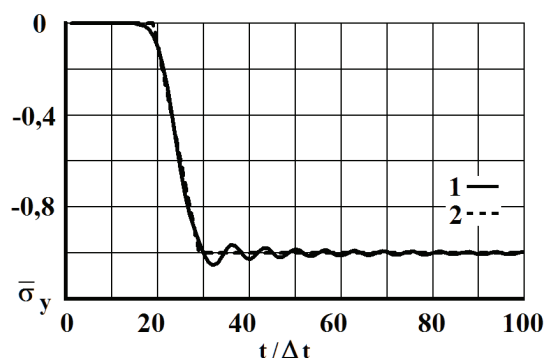


Рис. 12. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ во времени $t/\Delta t$ в точке B10: 1 – численное решение; 2 – аналитическое решение

На фронте плоской продольной волны имеется следующая аналитическая зависимость для плоского напряженного состояния $\sigma_y = -|\sigma_0|$. Отсюда видим, что точное решение задачи соответствует воздействию σ_0 (рис. 2). Для нормального напряжения σ_y имеется хорошее качественное и количественное совпадение с результатом аналитического решения. На основании проведенных исследований можно сделать вывод о физической достоверности результатов численного решения задач при распространении нестационарных упругих волн в деформируемых телах. Сравнение результатов нормальных напряжений, полученных с помощью метода конечных элементов в перемещениях, при решении задачи о распространении плоских продольных нестационарных упругих волн в полуплоскости с результатами аналитического решения, показало хорошее совпадение.

Список литературы

1. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11. – С. 10–14.
2. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 12 (1). – С. 28–32.
3. Мусаев В.К. Оценка точности и достоверности численного моделирования при решении задач об отражении

и интерференции нестационарных упругих волн напряжений // Успехи современного естествознания. – 2015. – № 1 (часть 7). – С. 1184–1187.

4. Мусаев В.К. Численное решение задачи о распространении нестационарных упругих волн напряжений в подкрепленном круглом отверстии // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 2. – С. 93–97.

5. Мусаев В.К. Математическое моделирование поверхностных волн напряжений в задаче Лэмба при воздействии в виде дельта функции // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 2 (часть 1). – С. 25–29.

6. Мусаев В.К. Математическое моделирование поверхностных волн напряжений в задаче Лэмба при воздействии в виде функции Хевисайда // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 5 (часть 1). – С. 38–41.

7. Мусаев В.К. Численное моделирование плоских продольных волн в виде импульсного воздействия (восходящая часть – четверть круга, средняя – горизонтальная, нисходящая – линейная) в упругой полуплоскости // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 11 (часть 2). – С. 222–226.

8. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных стоячих упругих волн в бесконечной полосе при воздействии в виде треугольного импульса // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 11 (часть 2). – С. 248–251.

9. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в Курпсайской плотине с основанием (полуплоскость) с помощью волновой теории сейсмической безопасности // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2016. – № 3–1. – С. 47–50.

10. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих динамических напряжений в полуплоскости без полости и с полостью с помощью волновой теории сейсмической безопасности // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2016. – № 3–2. – С. 227–231.