

УДК 621.3.011

ТОКОВИХРЕВАЯ ПЛАНАРНАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛЁНКИ (ОБЗОР)

¹Сапогин В.Г., ¹Прокопенко Н.Н., ²Панич А.Е.

¹Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону,

e-mail: sapogin@mail.ru, prokopenko@sssu.ru;

²Институт высоких технологий и пьезотехники Южного Федерального университета,

Ростов-на-Дону, *e-mail: aepanich@yandex.ru*

Предложен метод расчёта индуктивности сплошного немагнитного проводящего цилиндра произвольных геометрических размеров с азимутальной плотностью вихревого тока при наличии омических потерь и магнитных свойств токов Фуко. Получены радиальные распределения азимутальной компоненты вектора напряженности вихревого электрического поля, плотности токов Фуко, удельной тепловой мощности, выделяемой в локальной области проводящего цилиндра. Из энергетических соображений получена формула для динамической частотно-зависимой индуктивности сплошного цилиндра. Из неё следует, что динамическая индуктивность обращается в нуль для двух характеристических частот системы и имеет положительные и отрицательные значения. Предложен метод расчёта частотно-независимой токовихревой индуктивности тонкой проводящей цилиндрической плёнки. Исследуется наноразмерный эффект, возникающий в планарной индуктивности с перспективной технологией «проводящая плёнка внутри токового кольца». Обсуждаются свойства токовихревых индуктивностей с различными геометриями индуктора.

Ключевые слова: вихревое электрическое поле, динамическая индуктивность, положительная токовихревая индуктивность, отрицательная токовихревая индуктивность, перспективная технология «проводящая пленка внутри токового кольца» (ПВТК-технология)

EDDY-CURRENT PLANAR INTEGRAL INDUCTANCE OF CYLINDRICAL CONDUCTING FILM (REVIEW)

¹Sapogin V.G., ¹Prokopenko N.N., ²Panich A.E.

¹Don State Technical University, Rostov-on-Don, *e-mail: sapogin@mail.ru, prokopenko@sssu.ru;*

²Institute for Advanced Technologies and Piezotechniques, Southern Federal University,

Rostov-on-Don, *e-mail: aepanich@yandex.ru*

The calculation method of solid nonmagnetic conducting cylinder's inductance of arbitrary geometric dimensions with azimuthal density of eddy current under resistance loss and magnetic properties of Foucault currents has been proposed. The radial distributions of azimuthal component of eddy-current electric field's strength vector, densities of Foucault currents, heat power density, being emanated in local domain of conducting cylinder, have been obtained. The formula for dynamic frequency-dependent inductance of solid cylinder has been obtained from energy considerations. It is followed from this formula that dynamic inductance vanishes for two characteristic frequencies of system and has positive and negative values. The calculation method for frequency-independent eddy-current inductance of thin conducting cylindrical film has been suggested. The nano dimensional effect of planar inductance with perspective «conducting film inside current ring»-technology (CFICR-technology) is studied. The general properties of eddy-current inductances with different geometry of inductor are discussed.

Keywords: eddy-current electric field, dynamic inductance, positive eddy-current inductance, negative eddy-current inductance, perspective technology «conducting film inside current ring» (CFICR-technology)

В мае 1999 года Yue и Wong опубликовали работу [9], в которой предложили принципиально новое технологическое решение для построения разнообразных планарных индуктивностей. Они исследовали три варианта планарного размещения спирального индуктора, кремниевой подложки и экрана (сплошного, либо узорчатого). В первом варианте планарный прямоугольный спиральный индуктор был помещён на поверхность кремниевой платформы без металлического экрана и назвали его *NGS (No Ground Shield)*.

Во втором варианте добавлен сплошной экран. Конструкция была названа *SGS (Solid Ground Shield)*. В третьем варианте сплошной экран был заменён на узорчатый

экран. Такая конструкция была названа индуктор *PGS (Patterned Ground Shield)*. Две технологические конструкции (*NGS* и *PGS*) обнаружили частотные свойства добротности, которые принципиально отличались от частотных свойств одиночных индукторов. Они давали растущие частотные зависимости добротности, которые достигали максимума на частоте около 2-х гигагерц и затем спадали к нулю на частотах около 7-8 ГГц. Как известно, нуль добротности индуктивности соответствует нулю индуктивности. Никаких количественных объяснений свойств нового класса индуктивностей предложено не было.

Итальянскими исследователями в 2002 году в работе [8] была создана пла-

нарная индуктивность, которая отличалась от индуктивности, исследованной в [9], цилиндрической геометрией. В ней цилиндрическая спираль была нагружена на слоистую цилиндрическую структуру, состоящую из модифицированных слоёв кремния, лежащего на проводящей медной подложке. Узор экрана имел радиальную структуру.

Эксперименты не только подтвердили ход частотных зависимостей добротности, найденные в [9], но и обнаружили, что на гигагерцах индуктивность *RPGS* – индуктора (*Radial Patterned Ground Shield*) может обратиться в нуль, а на более высоких частотах даже стать отрицательной. В [8] была предложена базовая физическая модель такой индуктивности, которая была выполнена в виде схемы на сосредоточенных параметрах. Она давала достаточно точные совпадения теории с проводимыми экспериментами.

В 2009 году исследователи из штата Огайо снова натолкнулись на тот факт, что многослойная интегральная индуктивность может стать отрицательной [10]. Проведённые с различным количеством двойных слоёв (один двойной слой из Al и Cu имел толщину 200 нм) эксперименты показали, при количестве слоёв, начиная с шести, частотная зависимость индуктивности содержит участки, на которых индуктивность принимает отрицательные значения.

Эксперименты в [10] также обнаружили, что индуктивность системы, состоящей из двух двойных слоёв, может быть положительной и практически частотно-независимой. Но, к сожалению, никаких физических моделей, которые объясняли бы полученные в своей работе результаты, предложено не было.

Все перечисленные индукторы устроены примерно одинаково. Вид частотных характеристик рассмотренных индукторов можно объяснить тем, что силовые линии магнитного поля индуктора были нагружены на проводящую или полупроводящую плёнку, которая прилегалла к спиральной индуктору. Ток индуктора создавал своё переменное магнитное поле и магнитное поле отклика, формируемое токами Фуко, в проводящей плёнке. Взаимодействие тока индуктора с суммарным магнитным полем и приводило к появлению таких частотных характеристик, что его индуктивность на определённых частотах была положительной, а на других – отрицательной.

Как теперь становится понятным, причины этого связаны с магнитными эффектами, которые возникают при генерации вихревых токов Фуко и их взаимодействии с результирующим переменным магнитным полем, возникающим в цилиндрической проводящей плёнке. Цель предлагаемой работы

объяснить не только существование частотно-зависимой токовихревой индуктивности, которая на определённых частотах может быть отрицательной, но и указать на возможность существования частотно-независимой положительной индуктивности.

Частотно-зависимая токовихревая индуктивность

Предположим, что сплошной проводящий немагнитный цилиндр находится во внешнем однородном переменном магнитном поле, направленном по оси z , $\mathbf{V} = (0, 0, B_z)$. Его зависимость во времени имеет вид

$$B_z = B_0 \cos \omega t, \quad (1)$$

где $B_0 = const$ не зависит от цилиндрических координат системы и ограничено в радиальном направлении внешним радиусом цилиндра R , а в аксиальном направлении произвольной высотой цилиндра, обозначенной через h (см. рис. 1). Заметим, что цилиндр, как геометрическое тело, переходит в плёнку при условии $h < R$, а в тонкую цилиндрическую плёнку при условии $h \ll R$.

При такой ориентации переменное магнитное поле может порождать в цилиндре вихревое электрическое поле, напряженность которого $\mathbf{E} = (0, E_\phi, 0)$ имеет одну компоненту. Впервые экспериментальное доказательство существования такой возможной ориентации вихревого электрического поля было обнаружено при создании бетатронов – индукционных ускорителей электронов. В них как раз ускорение электронов и осуществляется вихревым электрическим полем, силовые линии которого представляют собой концентрические окружности. Они формируются электромагнитом специальной формы (см., например [1]). Вторая возможная ориентация вихревого электрического поля, напряженность которого имеет две компоненты $\mathbf{E} = (E_r, E_\phi, 0)$, не реализуется.

Компоненты полей связаны между собой первым уравнением Максвелла, записанным в проекциях

$$(\nabla \times \mathbf{E})_z = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (2)$$

Полагая в (2), что фаза вихревого электрического поля совпадает по фазе со скоростью изменения магнитного поля

$$E_\phi = E_0(r) \sin \omega t, \quad (3)$$

из уравнения (3) получим уравнение, связывающее $E_0(r)$ и B_0

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_0) = \omega B_0. \quad (4)$$

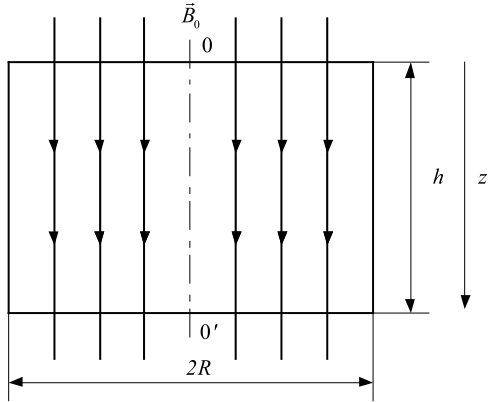


Рис. 1. Ориентация силовых линий магнитного поля B_0 в пространстве цилиндра

Его решение для $E_0(r)$ имеет вид

$$E_0(r) = \omega B_0 r / 2 + C_1 / r. \quad (5)$$

В решении (5) избавимся от особенности при $r \rightarrow 0$, полагая $C_1 = 0$. Это условие приводит к тому, что при $B_0 = 0$ $E_0 = 0$. Из (2) видно, что азимутальная компонента вектора напряженности вихревого электрического поля – линейная функция радиуса r с масштабом

$$E_* = \omega B_0 R / 2 = \pi f B_0 R. \quad (6)$$

В масштабе напряженности учтено соотношение $\omega = 2\pi f$. Тогда (5) с учётом (6) имеет вид

$$E_0(r) = E_* r / R \text{ при } 0 \leq r \leq R. \quad (7)$$

Электрическое поле в проводящем цилиндре создает вихревые токи Фуко, плотность тока которых имеет такое же направление в пространстве $\vec{j} = (0, j_\phi, 0)$. Плотность токов Фуко рассчитывается из дифференциального закона Ома

$$j_\phi = E_\phi / \rho, \quad (8)$$

где ρ – удельное электрическое сопротивление проводящего цилиндра.

Из (8) видно, что плотность тока Фуко в однородной проводящей среде $\rho = const$ также является линейной функцией радиуса и также зависит от времени, как и E_ϕ

$$j_\phi = j_0(r) \sin \omega t, \quad (9)$$

где $j_0(r)$ связано с масштабом плотности тока

$$j_* = \pi f B_0 R / \rho \quad (10)$$

соотношением

$$j_0(r) = j_* r / R. \quad (11)$$

Из соотношения (10) видно, что при прочих равных условиях масштаб тока мо-

жет достигать больших значений на высоких частотах для проводящей среды с малым значением удельного сопротивления ρ .

Удельная тепловая мощность, выделяемая в локальной области проводника при протекании токов Фуко, рассчитывается из закона Джоуля Ленца:

$$p_v = \rho j_\phi^2 = p_* \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \omega t, \quad (12)$$

где

$$p_* = \rho j_*^2 = \pi^2 f^2 B_0^2 R^2 / \rho \quad (13)$$

масштаб объемной плотности тепловой мощности.

Как видно из (13), удельная мощность уже пропорциональна квадрату частоты и для проводящей среды с произвольным значением удельного сопротивления оказывается наиболее значительным на внешней границе цилиндра. Это может приводить к перегреву его внешней боковой поверхности на высокой частоте.

Тепловая мощность, выделяемая во всём цилиндре, находится из (12)

$$P = \int_V p_v dv = P_* \sin^2 \omega t, \quad (14)$$

где масштаб тепловой мощности имеет вид

$$P_* = p_* \pi R^2 h / 2 = \pi^3 f^2 B_0^2 R^4 h / (2\rho). \quad (15)$$

Вихревой ток, индуцированный во всём цилиндре, может быть получен из интегрирования плотности тока

$$i = \int_S \mathbf{j} ds = \int_0^h \int_0^R j_\phi dr dz = i_* \sin \omega t, \quad (16)$$

где

$$i_* = j_* h R / 2 = \pi f B_0 h R^2 / (2\rho) \quad (17)$$

масштаб индукционного тока.

Вихревая плотность токов Фуко (9) создаёт в пространстве цилиндра собственное магнитное поле \mathbf{B}_1 . Это магнитное поле отклика вещества для исходной ориентации вихревых токов в цилиндрической системе координат имеет две проекции B_{1r} и B_{1z} . Направление проекции B_{1z} для некоторых моментов времени во всех точках цилиндра противоположно внешнему магнитному полю B_0 . Предполагая, что компонента B_{1r} не зависит от координаты z , распределение магнитного поля отклика вещества можно рассчитать из второго уравнения Максвелла, записанного в проекциях (частная производная компоненты B_{1r} по переменной z опущена):

$$(\nabla \times \mathbf{B}_1)_\phi = -\frac{\partial B_{1z}}{\partial r} = \mu_0 j_\phi. \quad (18)$$

Интегрируя (18) для начального условия $B_{1z}(0) = 0$, получим

$$B_{1z} = -B_{1*}(r/R)^2 \sin \omega t, \quad (19)$$

где

$$B_{1*} = \mu_0 j_* R / 2 \quad (20)$$

масштаб индукции магнитного поля отклика вещества. Его можно связать с индукцией внешнего магнитного поля безразмерным параметром β

$$B_{1*} = \beta B_0, \quad (21)$$

который указывает на различное влияние магнетизма токов Фуко

$$\beta = \frac{\mu_0 \pi R^2 f}{2\rho} = \frac{f}{f_*}, \quad (22)$$

где

$$f_* = 2\rho / (\mu_0 \pi R^2) \quad (23)$$

масштаб частоты системы.

Средняя за период T изменения поля магнитная энергия, поступающая в цилиндр, находится из интегрирования

$$\langle W \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{V_0} \frac{(\mathbf{B})^2}{2\mu_0} dV dt, \quad (24)$$

где результирующая индукция магнитного поля системы

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1. \quad (25)$$

Тогда $\langle W \rangle$ состоит из двух слагаемых: средней за период энергии внешнего поля

$$\langle W_0 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^R \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{B_0^2}{2\mu_0} r d\phi dr dz dt = \frac{B_0^2 \pi R^2 h}{4\mu_0}. \quad (26)$$

и средней энергии магнитного поля отклика вещества

$$\begin{aligned} \langle W_1 \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^R \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{B_{1*}^2 r^4}{2\mu_0 R^4} r d\phi dr dz dt = \\ &= \frac{B_0^2 \pi R^2 h}{4\mu_0} \frac{\beta^2}{3}. \end{aligned} \quad (27)$$

Интегрирование за период скалярного произведения $2\mathbf{B}_0\mathbf{B}_1$ обращается в нуль из-за наличия фазового сдвига $\pi/2$ между индукциями B_1 и B_0 . В связи с этим между переменными полями B_1 и B_0 возникает своеобразная интерференция, которая и суммирует обе энергии

$$\langle W \rangle = \langle W_0 \rangle + \langle W_1 \rangle. \quad (28)$$

Вносимая за период магнитная энергия (28) расходуется на нагрев проводящего цилиндра W_q и ту часть энергии, которая запасается в индуктивность системы

$$\langle W \rangle = W_q + L \langle i^2 \rangle / 2. \quad (29)$$

Тепловая энергия, расходуемая на нагрев цилиндра за период, вычисляется интегрированием (14) по времени

$$W_q = \int_0^T P dt = \frac{P_*}{2f} = 2\pi\beta \langle W_0 \rangle. \quad (30)$$

Среднее за период значение квадрата тока найдём из (16)

$$\langle i^2 \rangle = i_*^2 / 2. \quad (31)$$

Подставляя в (28) и (29) вычисленные энергии, получим частотную зависимость для приведённой токовихревой индуктивности цилиндра из энергетических соотношений

$$\frac{L}{L_*} = (1 + \beta^2 / 3 - 2\pi\beta) / \beta^2, \quad (32)$$

где

$$L_* = \mu_0 \pi R^2 / h \quad (33)$$

масштаб индуктивности, который зависит только от геометрических размеров цилиндра. Он может принимать большие значения для тонких плёнок при выполнении условия $h/R \ll 1$.

Как видно из (32), индуктивность проводящего цилиндра обращается в нуль на двух характеристических частотах F_1 и F_2 ($F_1 < F_2$) и имеет низкочастотную неустраиваемую особенность при $\beta \rightarrow 0$:

$$\frac{F_1}{f_*} = \beta_1 = 3\pi \left(1 - \sqrt{1 - 1/(3\pi^2)}\right) \approx 0,1605. \quad (34)$$

$$\frac{F_2}{f_*} = \beta_2 = 3\pi \left(1 + \sqrt{1 - 1/(3\pi^2)}\right) \approx 18,69. \quad (35)$$

Нули индуктивности делят весь частотный интервал на три части. В низкочастотном интервале выполнено условие $0 < \beta < \beta_1$. В нём индуктивность цилиндра положительная величина, убывающая с ростом частоты (проявляется слабый ферромагнетизм токов Фуко). Среднечастотный диапазон (выполнено условие $\beta_1 < \beta < \beta_2$), в котором индуктивность принимает отрицательные значения (проявляется сильный диамагнетизм токов Фуко). В этом интервале минимальное значение индуктивности $L_{\min} = (1/3 - \pi^2)L_* = -9,536L_*$ достигается на частоте $\beta_0 = 1/\pi = 0,3183$. Высокочастотный диапазон (выполнено условие $\beta_2 < \beta < \infty$), в котором она принимает положительные значения (снова проявляется слабый ферромагнетизм токов Фуко). На КВЧ её значения перестают зависеть от частоты и стремятся к значению $L_\infty = L_* / 3$.

Что указывает на отличительное свойство динамической индуктивности – отсутствие частоты среза. Последнее утверждение требует экспериментальной проверки на КВЧ.

Эксперименты, проведённые с многослойными плёнками (число двойных слоёв больше 2) в [10], указывают на хорошее качественное совпадение теоретической частотной зависимости отрицательной индуктивности в среднечастотном диапазоне с экспериментом. На шести двойных слоях наблюдают две характеристические частоты (два нуля индуктивности), находящиеся несимметрично по обе стороны от её минимального значения. На десяти двойных слоях наблюдают только верхнюю характеристическую частоту. На тридцати двойных слоях в выбранный для экспериментов частотный диапазон ни один ноль индуктивности не попал.

Одним из существенных недостатков предлагаемой физико-математической модели динамической индуктивности является тот факт, что на сверхнизких частотах, по сравнению с масштабом частоты, частотная зависимость индуктивности имеет неустрашимую особенность. Физические причины этого заключаются в том, что индуцированный за счёт электромагнитной индукции квадрат токов Фуко оказывается пропорционален квадрату частоты.

Поскольку динамическая индуктивность есть коэффициент пропорциональности между энергией магнитного поля и квадратом тока, то поэтому в конечное соотношение для индуктивности входит квадрат частоты в знаменателе. Когда квадрат частоты тока идёт в нуль, то потери на нагрев в системе становятся малыми, магнитное поле отклика становится слабым за счёт малости β , а энергия внешнего магнитного поля, закачиваемого в систему, остаётся постоянной величиной, совпадающей с энергией магнитного поля, запасённого в индуктивности. Из-за этого стремление тока к нулю даёт увеличение индуктивности, которое описывается особенностью, обратно пропорциональной квадрату частоты.

Существование особенности индуктивности приводит к тому, что динамическая индуктивность не переходит в статическую индуктивность на низких частотах. В экспериментах же, проведённых в [8], такой переход наблюдается всегда. Наличие особенности индуктивности на сверхнизких частотах указывает на достоинство предлагаемого метода. Он может быть применён для расчёта микроскопических индуктивностей в интервале высоких, сверхвысоких и крайне высоких частот, который начинается с частоты порядка 100 МГц.

Экспериментальные исследования поведения модели на сверхнизких частотах реальных индуктивностей цилиндрической пленки позволит ввести ограничения на значения нижней частоты среза, существующей в модели, ниже которой теория будет сильно расходиться с экспериментом.

Заметим, что в соотношении (29) не учтена магнитная энергия, которая поставляется в систему радиальной компонентой магнитного поля отклика вещества B_{1r} . Если эту энергию учесть, то приведённая индуктивность цилиндра, начинает зависеть от относительного энергетического вклада радиальной компоненты как от параметра α .

В связи с чем (32) видоизменяется и имеет вид

$$1 + \beta^2 / 3 + \alpha = 2\pi\beta + \beta^2 L / L^*, \quad (36)$$

где второй независимый параметр системы α

$$\alpha = \int_V B_{1r}^2 dV / (B_0^2 \pi R^2 h), \quad (37)$$

относительный положительный вклад радиальной компоненты в индуктивность сплошного проводящего цилиндра.

Как видно из (36), этот вклад не устраняет низкочастотную особенность, но приводит к изменению положения характеристических частот F_1 и F_2 индуктивности сплошного цилиндра. Положение первого корня зависит от параметра α по закону

$$\beta_1 = 3\pi - \sqrt{9\pi^2 - 3(1 + \alpha)}, \quad (38)$$

а положение второго корня

$$\beta_2 = 3\pi + \sqrt{9\pi^2 - 3(1 + \alpha)}. \quad (39)$$

Нуль дискриминанта уравнения (36) указывает на то, что при равенстве

$$\alpha = \alpha_0 = 3\pi^2 - 1 \quad (40)$$

корни частотной зависимости равны друг другу, а индуктивность проводящего цилиндра в этой точке обращается в нуль.

Это приводит к тому, что при небольшом относительном вкладе радиальной компоненты в магнитную энергию цилиндра (параметр α изменяется в области $0 < \alpha < \alpha_0 = 28,6$) есть интервал частот, на котором индуктивность будет принимать отрицательные значения. При выполнении неравенства $\alpha > \alpha_0$ (вклад радиальной компоненты в магнитную энергию цилиндра велик) у частотной зависимости индуктивности нулей нет и индуктивность цилиндра положительна для любых частот. В этом случае токи Фуко проявляют только слабые ферромагнитные свойства.

В табл. 1 даны 6 точек зависимости приведённых характеристических частот индуктивности (38) и (39) от параметра α .

Таблица 1
Расположение нулей частотной зависимости индуктивности от параметра α

α	0	6	12	18	24	27
β_1	0,160	1,189	2,366	3,783	5,706	7,228
β_2	18,689	17,660	16,484	15,066	13,143	11,622

Из табл. 1 видно, что с ростом α корни частотной зависимости приближаются друг к другу. Это уменьшает ширину среднечастотного интервала, в котором токи Фуко проявляют свои сильные диамагнитные свойства. Как показывают сравнения вычислений с известными экспериментами, параметр α для сплошной цилиндрической плёнки близок к нулю. Его действие следует учитывать в цилиндрических плёнках с геометрией кольца, имеющего конечную радиальную толщину.

Частотно-независимая токовихревая индуктивность

Как показывают эксперименты, проведённые в [10], помимо динамической индуктивности, рассмотренной ранее, возможно ещё одно состояние токовихревой индуктивности. Она может быть частотно-независимой в определённом диапазоне частот и принимать положительные значения. В этих состояниях снова проявляются слабые ферромагнитные свойства токов Фуко.

Предположим, что сплошная проводящая немагнитная цилиндрическая плёнка находится, как и ранее, во внешнем однородном переменном магнитном поле, направленном по оси z , и имеет только одну компоненту $\vec{B} = (0, 0, B_z)$. Это внешнее для плёнки магнитное поле имеет ту же зависимость от времени, что и ранее

$$B_z = B_0 \cos \omega t. \quad (41)$$

Для простоты предполагаем, что однородное в пространстве магнитное поле $B_0 = \text{const}$ не зависит от цилиндрических координат системы и ограничено в радиальном направлении внешним радиусом цилиндра R , а в аксиальном направлении произвольной высотой цилиндра, обозначенной через h .

На рис. 2 указаны направления векторов и силовых линий внешнего переменного магнитного поля относительно оси плёнки. Показаны направления азимутальной компоненты вектора плотности тока Фуко, имеющей единственную компоненту j_ϕ , для некоторого момента времени.

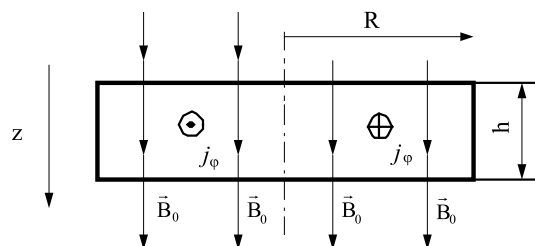


Рис. 2. Направление в пространстве основных векторов задачи

При такой ориентации переменное магнитное поле будет порождать в цилиндрической плёнке вихревое электрическое поле, напряженность которого $\vec{E} = (0, E_\phi, 0)$ имеет только одну компоненту, как и ранее. Компоненты полей связаны между собой первым уравнением Максвелла, записанным в цилиндрической системе координат (r, ϕ, z)

$$\sigma(\text{rot} \vec{E})_z = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad (42)$$

где $\sigma = \pm 1$ – уточняющий знаковый множитель. Уравнение (42) отличается от (2). Это отличие включает в себя две возможные ориентации ротора вихревого электрического поля по отношению к исходному направлению вектора B_0 . Как показывают эксперименты, проведённые в [10], значение $\sigma = -1$ возникает в плёнках с толщиной десятки и сотни нанометров. В таких сверхтонких плёнках токи Фуко формируют частотно-независимую положительную индуктивность, проявляя свои слабые ферромагнитные свойства. Этот эффект проявляется только в проводящих плёнках с толщиной от 10 до 500 нм.

Значение $\sigma = +1$ реализуется при протекании токов Фуко в проводящих цилиндрах в макроскопических масштабах, когда проявляются их сильные диамагнитные свойства. Высоты проводящих цилиндров при этом должны быть больше радиуса и значительно больше 1 мкм. Такие значения величин преобразуют плёнку в цилиндр, токи Фуко которого обычно диамагнитны для определённых распределений в пространстве магнитных полей индуктора.

Полагая в (42), что

$$\sigma E_\phi = E_0(r) \sin \omega t, \quad (43)$$

из уравнения (43) получим уравнение, связывающее $E_0(r)$ и B_0

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma E_0) = \omega B_0. \quad (44)$$

Его решение для $E_0(r)$ имеет вид

$$\sigma E_0(r) = \omega B_0 r / 2 + C_1 / r. \quad (45)$$

В решении (45) избавимся от особенности при $r \rightarrow 0$, полагая произвольную постоянную $C_1 = 0$. Это условие приводит к тому, что при $B_0 = 0$ $E_0 = 0$. Из (42) видно, что азимутальная компонента вектора напряженности вихревого электрического поля – линейная функция радиуса r с масштабом

$$E_* = \omega B_0 R / 2 = \pi f B_0 R. \quad (46)$$

В масштабе напряженности учтено соотношение $\omega = 2\pi f$. Тогда (45) с учётом (46) имеет вид

$$E_0(r) = \sigma E_* r / R \text{ при } 0 \leq r \leq R. \quad (47)$$

Электрическое поле в проводящем цилиндре создает вихревые токи Фуко, плотность тока которых имеет такое же направление в пространстве $\vec{j} = (0, j_\phi, 0)$. Плотность токов Фуко рассчитывается из дифференциального закона Ома

$$j_\phi = E_\phi / \rho, \quad (48)$$

где ρ – удельное электрическое сопротивление проводящей плёнки.

Из (48) видно, что плотность тока Фуко в однородной проводящей среде $\rho = const$ также является линейной функцией радиуса и также зависит от времени, как и E_ϕ

$$j_\phi = \sigma j_0(r) \sin \omega t, \quad (49)$$

где $j_0(r)$ связано с масштабом плотности тока

$$j_* = \pi f B_0 R / \rho \quad (50)$$

соотношением

$$j_0(r) = j_* r / R. \quad (51)$$

Вихревой ток, индуцированный во всей плёнке, может быть получен из интегрирования плотности тока в цилиндрических координатах

$$i = \int_S \vec{j} d\vec{s} = \int_0^h \int_0^R j_\phi dr dz = i_* \sin \omega t, \quad (52)$$

где

$$i_* = j_* h R / 2 = \pi f B_0 h R^2 / (2\rho) \quad (53)$$

масштаб индукционного тока.

Амплитуда электродвижущей силы, возникающей в пространстве цилиндра (плёнки) для фиксированного значения σ , зависит квадратично от локального значения радиуса r

$$\begin{aligned} \varepsilon(r) &= \oint \vec{E} d\vec{l} = \int_0^{2\pi} E_\phi r d\phi = \\ &= 2\pi r E_\phi = 2\pi E_* r^2 / R. \end{aligned} \quad (54)$$

А средняя по радиусу амплитуда электродвижущей силы имеет вид

$$\varepsilon_{cp} = \frac{1}{R} \int_0^R \varepsilon(r) dr = 2\pi R E_* / 3. \quad (55)$$

Среднее омическое сопротивление проводящей плёнки переменному вихревому току не зависит от времени

$$\begin{aligned} R_{омич} &= \varepsilon_{cp}(t) / i = \varepsilon_{cp} / i_* = \\ &= 4\pi\rho / 3h = 4\pi\rho_{ке} / 3. \end{aligned} \quad (56)$$

Этим сопротивлением обладает цилиндр (плёнка) на любой частоте и при любых значениях переменного тока (для линейного режима протекания). С точностью до постоянной величины оно совпадает с омическим сопротивлением квадрата.

Плотность вихревых токов Фуко (49) создаёт в пространстве цилиндра собственное магнитное поле \vec{B}_1 . Это магнитное поле отклика вещества на внешнее воздействие для исходной ориентации вихревых токов в цилиндрической системе координат имеет одну проекцию B_{1z} . Направление проекции B_{1z} во всех точках цилиндра противоположно внешнему магнитному полю B_0 . В этом и заключается основная причина диамагнетизма, проявляемого токами Фуко. Но как показано ниже, исключительно важную роль играют ещё и фазовые соотношения между взаимодействующими полями.

Распределение магнитного поля отклика вещества можно рассчитать из второго уравнения Максвелла, записанного в проекциях:

$$(\text{rot } \vec{B}_1)_\phi = -\frac{\partial B_{1z}}{\partial r} = \mu_0 j_\phi. \quad (57)$$

Интегрируя (57) для граничного условия $B_{1z}(0) = 0$ с учётом (49), получим

$$B_{1z} = -\sigma B_{1*} (r / R)^2 \sin \omega t, \quad (58)$$

где

$$B_{1*} = \mu_0 j_* R / 2 \quad (59)$$

масштаб индукции магнитного поля отклика вещества. Так же как и ранее его можно связать с индукцией внешнего магнитного поля безразмерным параметром β

$$B_{1*} = \beta B_0, \quad (60)$$

который указывает на влияние магнетизма токов Фуко

$$\beta = \frac{\mu_0 \pi R^2 f}{2\rho} = \frac{f}{f_*}, \quad (61)$$

где

$$f_* = 2\rho / (\mu_0 \pi R^2) \quad (62)$$

масштаб частоты системы. Как видно из (62), масштаб частоты системы не зависит от толщины цилиндрической плёнки.

Исследуем индуктивные свойства токов вихревой плёнки, усреднённые по времени. Найдём её потоковую индуктивность из соотношения

$$\langle \Phi \rangle = L_{\Phi} \langle i \rangle, \quad (63)$$

где под $\langle \Phi \rangle$ будем понимать суммарный средний за полупериод поток, пересекающий проводящую плёнку, который формируется внешним переменным магнитным полем B_0 и магнитным полем отклика вещества B_1 . Под значением $\langle i \rangle$ будем понимать среднее значение переменного тока одного направления за полупериод. Тогда коэффициент пропорциональности между ними L_{Φ} будет играть роль средней потоковой индуктивности.

Поток внешнего переменного однородного магнитного поля имеет вид

$$\Phi_0 = B_0 \pi R^2 \cos \omega t, \quad (64)$$

а поток переменного неоднородного магнитного поля отклика вещества вычисляется из соотношения

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \int_s \vec{B}_1 d\vec{s} = -\sigma \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R B_{1*} \sin \omega t \frac{r^3}{R^2} dr = \\ &= -\frac{\sigma \pi R^2}{2} B_{1*} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (65)$$

Из (65) видна важная роль множителя σ , который может принимать два различных значения.

Среднее значение суммарного потока за полупериод имеет вид

$$\langle \Phi \rangle = \langle \Phi_0 \rangle + \langle \Phi_1 \rangle, \quad (66)$$

где

$$\langle \Phi_0 \rangle = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} B_0 \pi R^2 \cos \omega t dt = 0, \quad (67)$$

а

$$\langle \Phi_1 \rangle = -\frac{2\sigma}{T} \int_0^{T/2} B_{1*} \pi R^2 \sin \omega t dt / 2 = -\sigma R^2 B_{1*}. \quad (68)$$

Из (67), (68) видно, что средний поток внешнего поля за полупериод всегда обращается в нуль, а среднее значение потока поля отклика может быть как положительным, так и отрицательным.

Подставляя (67) и (68) в (66) с учётом связи (63), получим

$$L_{\Phi} = \langle \Phi \rangle / \langle i \rangle = -\frac{\sigma \pi R^2 B_{1*}}{2 i_*} = \pm \frac{\mu_0 \pi R^2}{2 h}. \quad (69)$$

Из (69) следует, что средняя за полупериод индуктивность планарного токового слоя зависит только от геометрических размеров плёнки, но не зависит от частоты

и может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Её значение в 2 раза меньше, чем масштаб динамической индуктивности (33) и определяется только геометрическими размерами плёнки.

Добротность потоковой индуктивности плёнки не зависит от её толщины, но имеет линейную зависимость от рабочей частоты

$$Q = \omega L_{\Phi} / R_{\text{омич}} = \frac{3\mu_0 \pi R^2 f}{4\rho} = \frac{3f}{2f_*}. \quad (70)$$

Из (70) видно, что добротность $Q > 1$ будет у цилиндрических плёнок, рабочая частота которых больше, чем $2f_*/3$.

Как показывают эксперименты [10], величины R и h – могут совпадать с геометрическими размерами одиночного элементарного токового вихря, который возбуждается в проводящей плёнке. При соотношении $h < R$ толщина цилиндрической плёнки будет совпадать с толщиной одиночного элементарного токового вихря только для случая, когда толщина плёнки меньше 500 нм. При этих условиях реализуется положительная частотно-независимая потоковая индуктивность, а вихревые токи Фуко проявляют свои слабые ферромагнитные свойства.

Причина этого в том, что в этом случае реализуется значение $\sigma = -1$. Вихревые токи Фуко создают магнитное поле отклика, которое в течение полупериода направлено по оси z и создаёт положительное значение для усреднённого потока. Направления полей B_0 и B_1 в этом случае на первой и второй четверти периода указаны на рис. 3. На рис. 3 ток i_0 – ток, текущий в токовом кольце и создающий внешнее для плёнки поле B_0 .

На втором полупериоде величина потоковой индуктивности (69) остаётся прежней по причине того, что поток индукционного поля B_1 и вихревой ток изменяют свои значения на противоположные.

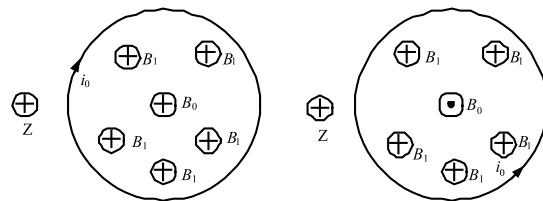


Рис. 3 – Направления полей B_0 и B_1 при $dB_0/dt < 0$, $\sigma = -1$ для двух ориентаций вектора B_0 для первой и второй четверти периода (слабые ферромагнитные свойства токов Фуко)

Если $h > 1$ мкм и условие $h < R$ не выполнено (возникает проводящий цилиндр), то возможны случаи, когда проводящий цилиндр находится, либо в состоянии отри-

пательной частотно-независимой индуктивности (токи Фуко проявляют свои сильные диамагнитные свойства в макроскопических масштабах), либо в состоянии частотно-зависимой динамической индуктивности, которая обращается в нуль на двух характеристических частотах (см. предыдущий раздел).

Причины появления отрицательной частотно-независимой индуктивности в случае $\sigma = +1$ заключаются в том, что вихревые токи Фуко создают магнитное поле отклика, которое в течение полупериода направлено против оси z . Это создаёт отрицательное значение для усреднённого потока. Направления полей B_0 и B_1 в этом случае на первой и второй четверти периода указаны на рис. 4. На рис. 4 ток i_0 – ток, текущий в токовом кольце и создающий внешнее для плёнки поле B_0 .

На втором полупериоде величина потоковой индуктивности (66) остаётся прежней по причине того, что поток индукционного поля B_1 и вихревой ток изменяют свои значения на противоположные.

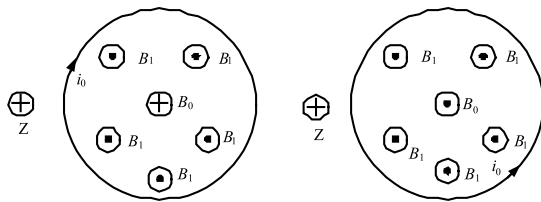


Рис. 4. Направления полей B_0 и B_1 при $dB_0/dt < 0$, $\sigma = +1$ для двух ориентаций вектора B_0 для первой и второй четверти периода (сильные диамагнитные свойства токов Фуко)

В современных чипах приемлемым значением интегральной индуктивности является значение 10 нГн. В табл. 2 приведены значения толщины плёнки в нанометрах и соответствующий радиус в микрометрах, который даёт фиксированное значение индуктивности плёнки в 10 нГн.

Таблица 2

Геометрические размеры плёнки для индуктивности 10 нГн

h (нм)	50	100	150	200	250
R (мкм)	16	23	28	32	36
h (нм)	300	350	400	450	500
R (мкм)	39	42	45	48	50

Расчёты для толщины плёнки больше 500 нм не приводятся по причине того, что одиночный элементарный токовый вихрь, который возбуждается в проводящей плёнке, в таком случае может оказаться

нестабильным и перейти в другое частотно-зависимое состояние динамической индуктивности.

Частотный диапазон работы такой плёнки определяется из масштаба частоты (62). Он не зависит от толщины плёнки и лежит в пределах

$$0,1f_* < f < 10f_* \quad (71)$$

Табл. 2 указывает на возможность дальнейшего уменьшения площади, занимаемой интегральной индуктивностью. Такое уменьшение может привести к достижению предельных значений поверхностной плотности индуктивности вплоть до порядка 10 Гн/м².

Наноразмерный эффект перспективной технологии «проводящая плёнка внутри токового кольца»

Планарные индуктивности, которые реализуются на диэлектрической подложке в виде многовитковых круглых, спиральных, квадратных или более сложных геометрических форм широко используются в современных устройствах связи и телекоммуникаций в структурах «система на кристалле» или «система в корпусе» [6].

В ряде случаев интегральная индуктивность, предназначенная для СВЧ диапазона, выполняется в виде одного витка [6] из напыляемой на подложку металлической плёнки, образующей токовое кольцо. Однако такое конструктивно-технологическое решение уменьшает численное значение индуктивности до единиц наногенри (она изменяется в диапазоне от 0,5 до 3,5 нГн для геометрических размеров от 20 мкм до 100 мкм, [6]).

Рассмотрим конструкцию планарной индуктивности, которая использует обнаруженный выше наноразмерный эффект при своей реализации. Она приведена на рис. 5 и использует известную одновитковую топологию её создания [6].

Во внутреннюю область витка (токового кольца) из металлической плёнки толщиной h_1 введена дополнительная тонкая плёнка толщиной $h_2 \ll h_1$ радиусом $R < R_1$ из материала, обладающего заданной электропроводностью и не имеющего электрического контакта с витком.

На рис. 5 приняты следующие обозначения: R – радиус дополнительной тонкой плёнки, h_2 – её толщина; R_1 – внутренний радиус витка (токового кольца) из металлической плёнки толщиной h_1 ; R_2 – внешний радиус витка; 1 и 2 выводы интегральной индуктивности для её включения в электронную схему.

Индуктивность конструкции L (рис. 5) относительно выводов 1 и 2 складывается из двух составляющих

$$L = L_k + L_\phi, \quad (72)$$

где L_k – индуктивность витка (токового кольца), расчет которой можно выполнить на основе формул и графиков, представленных в [6]; L_ϕ – потоковая индуктивность дополнительной тонкой цилиндрической пленки h_2 , рассчитывается по соотношению (69). В нём букву h следует заменить на h_2 .

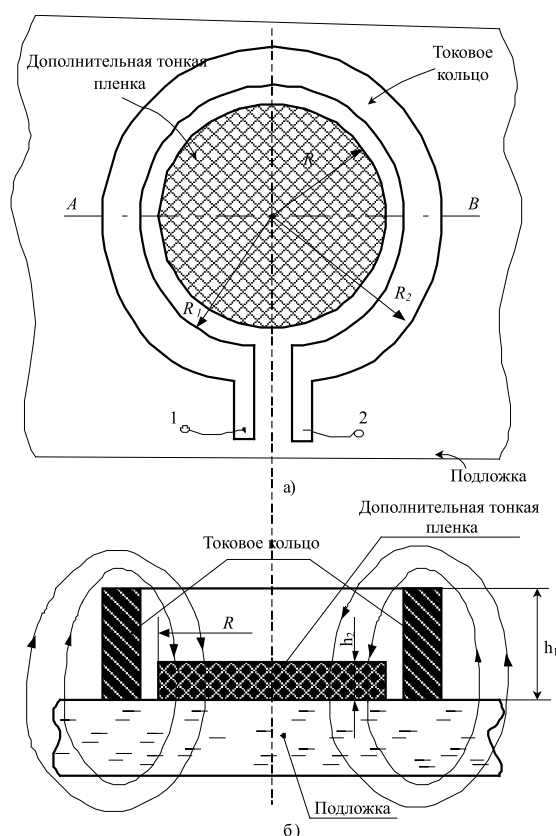


Рис. 5. Предлагаемая конструкция индуктивности (а) и ее разрез по вертикальному сечению АВ (б)

В табл. 3 приведены значения потоковой индуктивности L_ϕ , рассчитанные из (69), которые можно реализовать для тонкой пленки радиусом $R = 50$ мкм. Суммарная положительная индуктивность системы будет определяться из (72).

Таблица 3

Зависимость потоковой индуктивности L_ϕ тонкой пленки от ее толщины h_2

h_2 , (нм)	50	100	150	200	250	300	350
L_ϕ , (нГн)	100	50	33,3	25	20	16,7	14,3

При этом удельное сопротивление тонкой пленки не влияет на величину индуктивности между выводами 1 и 2, а изменяет только частотный диапазон, в котором такая индуктивность будет оставаться частотно-независимой. Диапазон рабочих частот для проводящей пленки можно оценить из условия (71). Значения масштаба частоты, зависящего от удельного сопротивления тонкой пленки, рассчитанные из соотношения (62), представлены в табл. 4.

Таблица 4

Масштаб частоты проводящей пленки радиусом 50 мкм

№ п/п	Материал	Удельное сопротивление, ом×м	Масштаб частоты, Гц
1	медь	$15,5 \times 10^{-9}$	$3,14 \times 10^6$
2	алюминий	$25,0 \times 10^{-9}$	$5,0 \times 10^6$
3	вольфрам	$48,9 \times 10^{-9}$	$10,0 \times 10^6$
4	никель	$61,4 \times 10^{-9}$	$12,4 \times 10^6$
5	нихром	$1,0 \times 10^{-6}$	203×10^6
6	кремний электронный (КЕФ)	$1,0 \times 10^{-3}$	203×10^9

Из табл. 3 и 4 видно, что использование, например, алюминия при напылении дополнительной тонкой пленки радиусом $R = 50$ мкм и толщиной $h_2 = 100$ нм позволит получить индуктивность тонкой пленки $L_\phi = 50$ нГн. Такая пленка будет обеспечивать частотно-независимую индуктивность в диапазоне частот от 0,5 до 50 МГц.

Применение пленки тех же геометрических размеров из нихрома обеспечивает постоянство индуктивности в диапазоне от 20 МГц до 2 ГГц; из меди – от 0,3 до 30 МГц; из вольфрама – от 1 до 100 МГц; из никеля – от 1,2 до 120 МГц; из кремния – от 20 ГГц до 2 ТГц.

Предлагаемая нами конструкция положительной планарной индуктивности с технологией «проводящая пленка в токовом кольце» имеет существенные преимущества по величине получаемой микроскопической интегральной индуктивности в сравнении с классическим одновитковым решением. Наноразмерный эффект, обнаруженный экспериментально в [10] и подтвержденный теоретически в этой работе, позволяет реализовать более высокие значения микроскопической индуктивности. Как видно из табл. 3, индуктивность изменяется в диапазоне от 100 нГн до 14 нГн, что значительно лучше (в 7-50 раз) максимальной индуктивности известных в КМОП – традиционных технологиях, достигаемых в одном слое.

Выбор значения удельного сопротивления материала, из которого создается тонкая

пленка, позволяет «сдвигать» рабочий диапазон частот предлагаемой индуктивности в заданный частотный диапазон. Но, необходимо учитывать, что повышение рабочего диапазона частот будет приводить к увеличению омического сопротивления плёнки переменному току. Наиболее критичным этот эффект будет для сверхтонких плёнок.

Заключение

Эксперименты, выполненные с однослойными и многослойными проводящими плёнками, а также с проводящими цилиндрическими стержнями, указывают на следующие особенности получения положительной или отрицательной токовихревой индуктивности. Особую роль в них играет геометрия токового индуктора. По геометрии создаваемых силовых линий магнитного поля токовые индукторы следует классифицировать как открытые и закрытые.

К закрытым индукторам отнесём классические соленоиды конечной длины. В них средняя плотность силовых линий магнитного поля внутри всегда выше, чем снаружи. На изменение индуктивности соленоида и его частоты среза можно влиять различными способами. Наиболее существенные изменения можно получить, связывая магнитные силовые линии проводящими стержнями или плёнками с различным количеством слоёв. Плёнки устанавливаются поперек силовых линий во внутренней области соленоида.

Для тонкой плёнки, с наноскопической толщиной, положительная индуктивность соленоида может существенно возрасти. При этом должна возникнуть частотно-независимая индуктивность. Она может увеличить частоту среза. В толстой или многослойной плёнке возможно появление состояния динамической индуктивности. На разных частотах суммарная индуктивность системы может иметь положительные значения индуктивности, отличающиеся от исходной индуктивности соленоида.

Расположение соленоида на полупроводящей или проводящей подложке связывает только незначительную часть внешних силовых линий магнитного поля. Это будет слабо изменять результирующую индуктивность соленоида и его частоту среза.

Заполнение проводником всего пространства внутри соленоида даёт максимальный эффект отрицательной индуктивности, вносимой проводящим стержнем. При этом суммарная индуктивность системы соленоид-стержень всегда будет уменьшена, но останется положительной.

К открытым индукторам следует отнести индукторы, выполненные в виде планарной

спирали. Такой индуктор создаёт магнитные силовые линии, которые симметрично расположены в обоих полупространствах. Расположение с одной стороны такого индуктора проводящей плёнки с наноскопической толщиной, увеличит суммарную положительную индуктивность системы. Она будет частотно-независимой. Расположение с разных сторон спирального индуктора двух одинаковых проводящих плёнок с наноскопической толщиной ещё больше увеличит положительную суммарную индуктивность системы с сохранением её частотных свойств.

Расположение с одной стороны спирали либо толстой проводящей, либо многослойной плёнки может дать состояние динамической индуктивности. В этом случае суммарная индуктивность системы станет отрицательной и будет зависеть от частоты. Расположение с обеих сторон спирали таких плёнок ещё больше увеличит отрицательную индуктивность системы. Увеличивая число слоёв, можно пропорционально их количеству повышать суммарную отрицательную индуктивность открытой системы.

Статья подготовлена по проекту № 8.374.2014/К Госзадания Минобрнауки РФ на 2014-2016 гг.

Список литературы

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 2. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы. – 1988. – С. 496.
2. Сапогин В.Г., Прокопенко Н.Н., Манжула В.Г., Сапунцов Н.Е., Нестюрина Е.Е. Индуктивность сплошного проводящего цилиндра с азимутальной плотностью вихревого тока в низкочастотной области // *Фундаментальные исследования*. – 2013. – № 11 (часть 3). – С. 441-446.
3. Сапогин В.Г., Прокопенко Н.Н., Марчук В.И., Манжула В.Г., Будяков А.С. Индуктивные свойства микроопического проводящего кольца с плотностью вихревого тока азимутального направления // *Нано- и микросистемная техника*. – 2014. – № 1. – С. 22-26.
4. Сапогин В.Г., Прокопенко Н.Н., Сапунцов Н.Е. Индуктивность цилиндрической плёнки с азимутальной плотностью вихревого тока // *Материалы международной конференции «Актуальные проблемы электронного приборостроения»*. Т. II. Саратов, Россия, 25-26 сентября 2014 г. – С. 358-365.
5. Сапогин В.Г., Прокопенко Н.Н. О методах расчёта микроопической интегральной индуктивности с высокой симметрией // *Радиотехника*. – 2015. – № 2. – С. 116-125.
6. Сапогин В.Г., Крутинский С.Г., Прокопенко Н.Н., и др. Интегральные индуктивности и трансформаторы аналоговых микросхем СВЧ – диапазона. – Шахты: ГОУ ВПО «ЮРГУЭС», – 2010. – С. 273.
7. Vladimir G. Sapogin, Nikolay N. Prokopenko and Ludmila K. Sapogina. Solution of Solitary Current Inductor's «Cut-off Frequency Problem» for EHF Applications. The International IEEE Conference on Microwaves, Communications, Antennas and Electronic Systems (COMCAS-2015). David Intercontinental Hotel 2-4 november 2015 Tel Aviv, Israel. 978-1-4799-7473-3/15/\$31.00 ©2015 IEEE. 107774.pdf.
8. Ragonese E., Biondi T., Scuderi A., Palmisano G.A. Lumped Scalable Physics-Based Model for Silicon Spiral Inductors. 0-7803-7530-0/02\$17.00 ©2002 IEEE. P. 119-124.
9. Yue C.P. and Wong S.S. On-Chip Spiral Inductors with Patterned Ground Shields for Si-Based RFIC's. IEEE J.Solid State Circuit, vol. 33, no. 5, p.p. 743-752, may 1999.
10. Widjaja A. and Sarangan A. Method for Fabrication Thin Film Structures with Negative Inductance. Case #: UD-488. US-Patent Pending; Publication # 20090261936. Inventor: Agus-Widjaja, et. al.