

УДК 539.3

## ОЦЕНКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ И ФИЗИЧЕСКОЙ ДОСТОВЕРНОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЛОСКИХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРУГИХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ (ДЕЛЬТА ФУНКЦИЯ) В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Мусаев В.К.

*Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II,  
Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru*

Рассмотрена некоторая информация о моделировании плоских нестационарных упругих волн напряжений в упругой полуплоскости. Для решения поставленной задачи применяются уравнения волновой теории упругости. На основе численного моделирования уравнений волновой теории упругости разработаны методика, алгоритм и комплекс программ для решения линейных нестационарных динамических задач. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью динамического равновесия. Получена явная двухслойная схема. При решении сложных задач возникают проблемы оценки достоверности полученных результатов. В работе рассматривается оценка точности и достоверности результатов численного моделирования волн напряжений при распространении плоской нестационарной упругой волны в полуплоскости. В качестве воздействия применяется дельта функция или треугольный импульс. Решается система уравнений из 59048 неизвестных.

**Ключевые слова:** вычислительная механика, численный метод, алгоритм, комплекс программ Мусаева В.К., нестационарные упругие волны, плоская продольная нестационарная волна, фундаментальное воздействие, распространение плоских волн, исследуемая расчетная область, дельта функция, треугольный импульс, верификация, математическая точность, физическая достоверность, точность численного метода, техносферная безопасность

## ASSESSMENT OF MATHEMATICAL ACCURACY AND PHYSICAL PLAUSIBILITY OF NUMERICAL MODELING NON-STATIONARY FLAT ELASTIC STRESS WAVES (DELTA FUNCTION) IN THE HALF PLANE

Musayev V.K.

*Moscow state transport University of Emperor Nicholas II, Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru*

Reviewed some information about modeling non-stationary flat elastic stress waves in an elastic half-plane. To solve the tasks used the equations of the wave theory of elasticity. Based on the numerical simulation of wave equations, elasticity theory, methodology, algorithm and program complex for solving linear non-stationary dynamic problems. Basic relations of the finite element method obtained through dynamic equilibrium. The explicit two-layer scheme. When complex tasks arise problems of estimation of reliability of the results. This paper considers the evaluation of the accuracy and reliability of results of numerical simulation of stress waves in the propagation of plane elastic nonstationary waves in a half-plane. As impact is applied to the Delta function or a triangular pulse. Solve the system of equations of 59048 unknown.

**Keywords:** computational mechanics, numerical method, algorithm, software complex Musayev V.K., unsteady elastic waves, a flat longitudinal non-stationary wave, fundamental effects, the propagation of plane waves, studied the computational domain, the Delta function, the triangular pulse, verification, mathematical accuracy, the physical accuracy, the accuracy of the numerical method, technosphere safety

Волны напряжений различной природы, распространяясь, в деформируемом теле взаимодействуют, друг с другом, что приводит к образованию новых областей возмущений, перераспределению напряжений и деформаций.

После трехкратного или четырехкратного прохождения и отражения волн напряжений в теле процесс распространения возмущений становится установившимся, напряжения и деформации усредняются, тело находится в колебательном движении.

Расчеты проводились при следующих единицах измерения: килограмм-сила (кгс); сантиметр (см); секунда (с). Для перехода в другие единицы измерения были приняты следующие допущения:  $1 \text{ кгс/см}^2 \approx 0,1 \text{ МПа}$ ;  $1 \text{ кгс с}^2/\text{см}^4 \approx 10^9 \text{ кг/м}^3$ .

Некоторая информация о моделировании нестационарных волн напряжений в деформируемых телах различной формы с помощью рассматриваемого численного метода, алгоритма и комплекса программ приведена в работах [1–10].

Приводится информация о численном моделировании нестационарных упругих плоских волн напряжений в упругой полуплоскости. Для решения поставленной задачи применяем метод конечных элементов в перемещениях.

### Постановка задачи с начальными и граничными условиями

Для решения задачи о моделировании упругих нестационарных волн напряжений в деформируемых областях сложной формы

рассмотрим некоторое тело  $\Gamma$  в прямоугольной декартовой системе координат  $XOY$ , которому в начальный момент времени  $t = 0$  сообщается механическое нестационарное импульсное воздействие.

Предположим, что тело  $\Gamma$  изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях.

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial Y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial Y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$(x, y) \in \Gamma,$$

$$\sigma_x = \rho C_p^2 \varepsilon_x + \rho (C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_y,$$

$$\sigma_y = \rho C_p^2 \varepsilon_y + \rho (C_p^2 - 2C_s^2) \varepsilon_x,$$

$$\tau_{xy} = \rho C_s^2 \gamma_{xy},$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial X}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial Y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X},$$

$$(x, y) \in (\Gamma \cup S), \quad (1)$$

где  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  – компоненты тензора упругих напряжений;  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$  – компоненты тензора упругих деформаций;  $u$  и  $v$  – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей  $OX$  и  $OY$  соответственно;  $\rho$  – плотность материала;

$C_p = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$  – скорость продольной упругой волны;

$C_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$  – скорость поперечной упругой волны;

$\nu$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль упругости;  $S (S_1 \cup S_2)$  – граничный контур тела  $\Gamma$ .

Систему (1) в области, занимаемой телом  $\Gamma$ , следует интегрировать при начальных и граничных условиях.

### Разработка методики и алгоритма

Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями (1) используем метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и векто-

ра внешних сил для тела  $\Gamma$ , записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\bar{H} \ddot{\Phi} + \bar{K} \bar{\Phi} = \bar{R}, \quad \dot{\Phi}|_{t=0} = \dot{\Phi}_0, \quad \ddot{\Phi}|_{t=0} = \ddot{\Phi}_0, \quad (2)$$

где  $\bar{H}$  – диагональная матрица инерции;  $\bar{K}$  – матрица жесткости;  $\bar{\Phi}$  – вектор узловых упругих перемещений;  $\dot{\bar{\Phi}}$  – вектор узловых упругих скоростей перемещений;  $\ddot{\bar{\Phi}}$  – вектор узловых упругих ускорений;  $\bar{R}$  – вектор внешних узловых упругих сил.

Соотношение (2) система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями.

Таким образом, с помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями (1) привели к линейной задаче Коши (2).

Для интегрирования уравнения (2) конечноэлементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду

$$\bar{H} \frac{d}{dt} \dot{\bar{\Phi}} + \bar{K} \bar{\Phi} = \bar{R}, \quad \frac{d}{dt} \bar{\Phi} = \dot{\bar{\Phi}}. \quad (3)$$

Интегрируя по временной координате соотношение (3) с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\ddot{\bar{\Phi}}_{i+1} = \ddot{\bar{\Phi}}_i + \Delta t \bar{H}^{-1} (-\bar{K} \bar{\Phi}_i + \bar{R}_i),$$

$$\dot{\bar{\Phi}}_{i+1} = \dot{\bar{\Phi}}_i + \Delta t \ddot{\bar{\Phi}}_{i+1}, \quad (4)$$

где  $\Delta t$  – шаг по временной координате.

Основные соотношения метода конечных элементов в перемещениях получены с помощью принципа возможных перемещений и конечноэлементного варианта метода Галеркина.

Общая теория численных уравнений математической физики требует для этого наложение определенных условий на отношение шагов по временной координате  $\Delta t$  и по пространственным координатам, а именно

$$\Delta t = 0,5 \frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i = 1, 2, 3, \dots), \quad (5)$$

где  $\Delta l$  – длина стороны конечного элемента.

Для исследуемой области, состоящей из материалов с разными физическими свойствами, выбирается минимальный шаг по временной координате (5).

В работах [1, 6, 8–10] приведена информация о физической достоверности и матема-

тической точности моделирования нестационарных волн напряжений в деформируемых телах с помощью рассматриваемого численного метода, алгоритма и комплекса.

### Численное моделирование импульсного воздействия в упругой полуплоскости

Рассмотрим задачу о воздействии плоской продольной волны в виде дельта функции (рис. 2) на упругую полуплоскость (рис. 1).

На границе полуплоскости АВ приложено нормальное напряжение  $\sigma_y$ , которое при  $0 \leq n \leq 10$  ( $n = t/\Delta t$ ) изменяется линейно от 0 до P, а при  $10 \leq n \leq 20$  от P до 0 ( $P = \sigma_0$ ,  $\sigma_0 = -0,1$  МПа ( $-1$  кгс/см<sup>2</sup>)). Граничные условия для контура BCDA при  $t > 0$   $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$ . Отраженные волны от контура BCDA не доходят до исследуемых точек при  $0 \leq n \leq 100$ . Расчеты проведены при следующих исходных данных:  $H = \Delta x = \Delta y$ ;  $\Delta t = 1,393 \cdot 10^{-6}$  с;  $E = 3,15 \cdot 10^4$  МПа ( $3,15 \cdot 10^5$  кгс/см<sup>2</sup>);  $\nu = 0,2$ ;  $\rho = 0,255 \cdot 10^4$  кг/м<sup>3</sup> ( $0,255 \cdot 10^5$  кгс·с<sup>2</sup>/см<sup>4</sup>);  $C_p = 3587$  м/с;  $C_s = 2269$  м/с. Решается система уравнений из 59048 неизвестных.

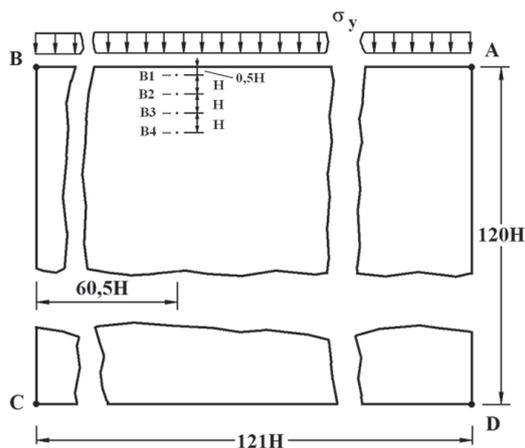


Рис. 1. Постановка задачи о распространении плоских продольных нестационарных упругих волн в полуплоскости

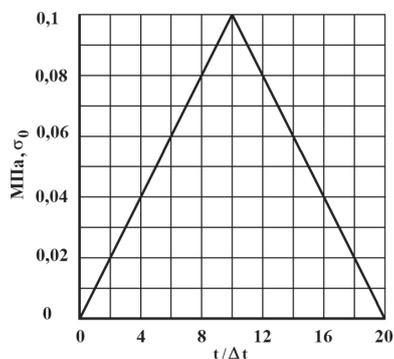


Рис. 2. Воздействие в виде дельта функции (треугольный импульс)

На рис. 3-6 представлено изменение нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  ( $\bar{\sigma}_y = \sigma_y / |\sigma_0|$ ) во времени  $n$  в точках B1–B4: 1 – численное решение; 2 – аналитическое решение.

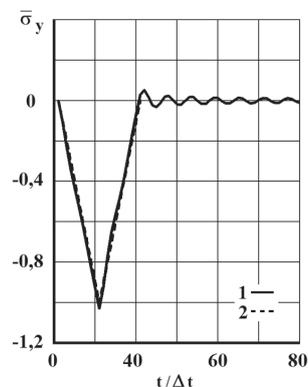


Рис. 3. Изменение упругого нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  во времени  $t/\Delta t$  в точке B1: 1 – численное решение; 2 – аналитическое решение

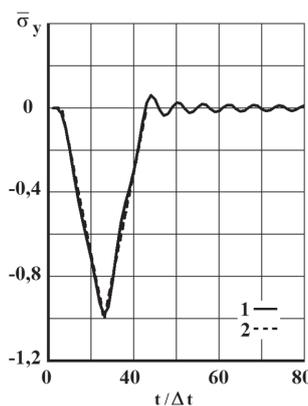


Рис. 4. Изменение упругого нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  во времени  $t/\Delta t$  в точке B2: 1 – численное решение; 2 – аналитическое решение

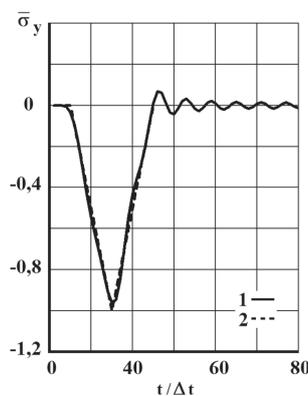


Рис. 5. Изменение упругого нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  во времени  $t/\Delta t$  в точке B3: 1 – численное решение; 2 – аналитическое решение

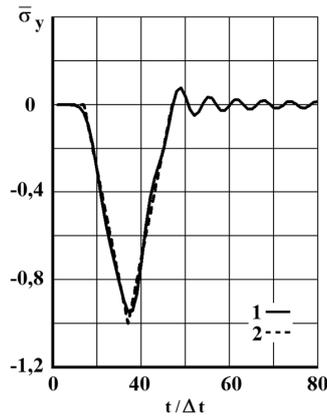


Рис. 6. Изменение упругого нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  во времени  $t/\Delta t$  в точке В4:  
1 – численное решение;  
2 – аналитическое решение

В данном случае можно использовать условия на фронте плоской волны. Предположим, что от некоторых точек упругой среды производится какое-то возмущение. Тогда из этих точек во все стороны начинают излучаться волны. На некотором расстоянии от центра возмущения рассматриваемые волны можно представить как плоские. Тогда все частицы движутся параллельно направлению распространения волны. Такие волны принято считать плоскими. На фронте плоской продольной волны имеется следующая аналитическая зависимость для плоского напряженного состояния  $\sigma_y = -|\sigma_0|$ . Отсюда видим, что точное решение задачи соответствует воздействию  $\sigma_0$  (рис. 2). Для нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  имеется хорошее качественное и количественное совпадение с результатом аналитического решения. На основании проведенных исследований можно сделать вывод о физической достоверности результатов численного решения задач при распространении нестационарных упругих волн в деформируемых телах.

Сравнение результатов нормальных напряжений, полученных с помощью метода конечных элементов в перемещениях, при

решении задачи о распространении плоских продольных нестационарных упругих волн в полуплоскости с результатами аналитического решения, показало хорошее совпадение.

Список литературы

1. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11. – С. 10–14.
2. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 12 (1). – С. 28–32.
3. Мусаев В.К. Моделирование безопасности по несущей способности дымовых труб с основанием при взрыве атомной бомбы в Нагасаки // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 12. – С. 198–203.
4. Мусаев В.К. Математическое моделирование поверхностных волн напряжений в задаче Лэмба при воздействии в виде дельта функции // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 2–1. – С. 25–29.
5. Мусаев В.К. Определение нестационарного напряженного состояния при вертикальном сосредоточенном взрывном воздействии на набережной речного порта с незаполненным водным объектом // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 2. – С. 88–92.
6. Мусаев В.К. Численное решение задачи о распространении нестационарных упругих волн напряжений в подкрепленном круглом отверстии // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 2. – С. 93–97.
7. Мусаев В.К. Решение задачи о сосредоточенном упругом взрывном воздействии в виде дельта функции на набережной речного порта с заполненным водным объектом на 25% // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 4. – С. 52–55.
8. Мусаев В.К. Решение задачи о распространении плоских продольных волн в виде импульсного воздействия // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 4–2. – С. 326–330.
9. Мусаев В.К. Исследования устойчивости явной двухслойной линейной конечноэлементной схемы для внутренних узловых точек на равномерной прямоугольной сетке // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 5. – С. 39–42.
10. Мусаев В.К. Численное моделирование плоских продольных волн в виде импульсного воздействия (восходящая часть – четверть круга, средняя – горизонтальная, нисходящая – линейная) в упругой полуплоскости // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 11–2. – С. 222–226.