

УДК 539.3

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЛОСКИХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ (ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ИМПУЛЬС) В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Мусаев В.К.

*Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II,
Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru*

Рассмотрена некоторая информация в области о моделирования плоских нестационарных упругих волн напряжений в упругой полуплоскости. Для решения поставленной задачи применяются уравнения вычислительной механики. Разработаны методика, алгоритм и комплекс программ Мусаева В.К. для решения линейных нестационарных динамических задач. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью динамического равновесия. Получена явная двухслойная схема. При решении сложных задач возникают проблемы оценки достоверности полученных результатов. В работе рассматривается оценка точности и достоверности результатов численного моделирования волн напряжений при распространении плоской нестационарной упругой волны в полуплоскости. В качестве воздействия применяется прямоугольный импульс. Решается система уравнений из 83448 неизвестных.

Ключевые слова: вычислительная механика, численный метод, алгоритм, комплекс программ Мусаева В.К., нестационарные упругие волны, плоская продольная нестационарная волна, фундаментальное воздействие, распространение плоских волн, исследуемая расчетная область, прямоугольный импульс, условия на фронте плоской волны, математическая точность, физическая достоверность, точность численного метода

TO EVALUATE THE ACCURACY OF COMPUTER MODELING OF PLANE NON-STATIONARY OF STRESS WAVES (RECTANGULAR PULSE) IN AN ELASTIC HALF-PLANE

Musayev V.K.

Moscow state transport University of Emperor Nicholas II, Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Reviewed some information in the field of modeling non-stationary flat elastic stress waves in an elastic half-plane. To solve the tasks used the equations of computational mechanics. The developed method, algorithm and program complex Musayev V.K. for the solution of a linear nonstationary dynamic problems. Basic relations of the finite element method obtained through dynamic equilibrium. The explicit two-layer scheme. When complex tasks arise problems of estimation of reliability of the results. This paper considers the evaluation of the accuracy and reliability of results of numerical simulation of stress waves in the propagation of plane elastic nonstationary waves in a half-plane. As the impact of the applied rectangular pulse. Solve the system of equations of 83448 unknown.

Keywords: computational mechanics, numerical method, algorithm, software complex Musayev V.K., unsteady elastic waves, a flat longitudinal non-stationary wave fundamental effects, the propagation of plane waves, studied the computational domain, a rectangular pulse, the conditions at the front, plane wave, mathematical accuracy, the physical accuracy, the accuracy of the numerical method

Постановки, численные методы, технология программных комплексов и анализ результатов решения нестационарных динамических задач с помощью рассматриваемого численного метода, алгоритма и комплекса программ рассмотрены в следующих работах [1–10].

В работах [3–6] приведена информация о физической достоверности и математической точности рассматриваемого численного метода, алгоритма и комплекса программ.

Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями используем метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов.

Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа

возможных перемещений. Чтобы выполнить динамический расчет методом конечных элементов, нужно иметь матрицу жесткости и матрицу инерции конечного элемента.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела Γ , записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\bar{H}\ddot{\bar{\Phi}} + \bar{K}\bar{\Phi} = \bar{R}, \quad \bar{\Phi}|_{t=0} = \bar{\Phi}_0, \quad \dot{\bar{\Phi}}|_{t=0} = \dot{\bar{\Phi}}_0, \quad (1)$$

где \bar{H} – диагональная матрица инерции; \bar{K} – матрица жесткости; $\bar{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\bar{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\bar{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; \bar{R} – вектор внешних узловых упругих сил.

Соотношение (1) система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями.

Таким образом, с помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями привели к линейной задаче Коши (1).

Интегрируя по временной координате соотношение (1) с помощью конечно-элементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_{i+1} &= \vec{\Phi}_i + \Delta t \vec{H}^{-1} (-\vec{K} \vec{\Phi}_i + \vec{R}_i), \\ \vec{\Phi}_{i+1} &= \vec{\Phi}_i + \Delta t \vec{\Phi}_{i+1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где Δt – шаг по временной координате.

Основные соотношения метода конечных элементов в перемещениях получены с помощью принципа возможных перемещений и конечноэлементного варианта метода Галеркина.

Общая теория численных уравнений математической физики требует для этого наложение определенных условий на отношение шагов по временной координате Δt и по пространственным координатам, а именно

$$\Delta t = k \frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i = 1, 2, 3, \dots), \quad (3)$$

где Δl – длина стороны конечного элемента.

Устойчивость явной двухслойной схемы исследуем с помощью численного экспери-

мента. Результаты численного эксперимента показали, что при $k = 0,5$ обеспечивается устойчивость явной двухслойной схемы.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать сложные задачи при нестационарных волновых воздействиях на уникальные объекты. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90.

Исследуемая область разбивается по пространственным переменным на треугольные конечные элементы с тремя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений и на прямоугольные конечные элементы с четырьмя узловыми точками с билинейной аппроксимацией упругих перемещений.

По временной переменной исследуемая область разбивается на линейные конечные элементы с двумя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений. Предложен квазирегулярный подход к решению системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями и к аппроксимации исследуемой области. Методика основывается на схемах: точка, линия, плоскость.

Расчеты проводились при следующих единицах измерения: килограмм-сила (кгс); сантиметр (см); секунда (с). Для перехода в другие единицы измерения были приняты следующие допущения: $1 \text{ кгс/см}^2 \approx 0,1 \text{ МПа}$; $1 \text{ кгс с}^2/\text{см}^4 \approx 10^9 \text{ кг/м}^3$.

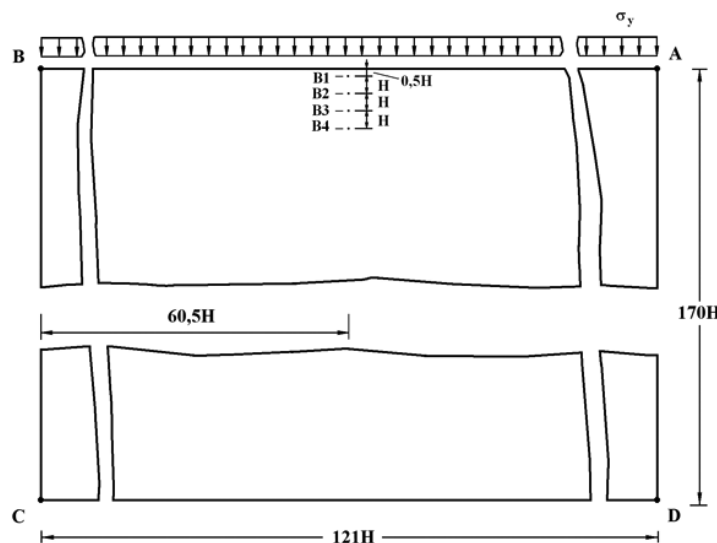


Рис. 1. Постановка задачи о распространении плоских продольных нестационарных упругих волн в полуплоскости

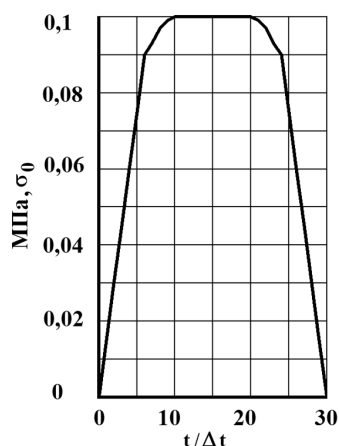


Рис. 2. Воздействие в виде прямоугольного импульса

Приводится информация о численном моделировании нестационарных упругих плоских волн напряжений в упругой полуплоскости. Для решения поставленной задачи применяем метод конечных элементов в перемещениях.

Рассмотрим задачу о воздействии плоской продольной волны в виде прямоугольного импульса (рис. 2) на упругую полуплоскость (рис. 1). На границе полуплоскости АВ приложено нормальное напряжение σ_y , которое при $0 \leq n \leq 10$ ($n = t/\Delta t$) изменяется от 0 до P , при $10 \leq n \leq 20$ равно P и при $20 \leq n \leq 30$ изменяется от P до 0 ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = -0,1$ МПа (-1 кгс/см²)). Граничные условия для контура ВСДА при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура ВСДА не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 100$. Расчеты проведены при следующих исходных данных: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 0,125 \times 10^{-4}$ с; $E = 22,366 \times 10^1$ МПа ($22,366 \times 10^2$ кгс/см²); $\nu = 0,22$; $\rho = 1,469 \times 10^3$ кг/м³ ($1,469 \times 10^{-6}$ кгс см²/см⁴); $C_p = 400$ м/с; $C_s = 250$ м/с. Решается система уравнений из 83448 неизвестных.

На рис. 3–6 представлено изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ ($\bar{\sigma}_y = \sigma_y / |\sigma_0|$) во времени n в точках В1–В4: 1 – численное решение; 2 – аналитическое решение.

Предположим, что от некоторых точек упругой среды производится какое-то возмущение. Тогда из этих точек во все стороны начинают излучаться волны. На некотором расстоянии от центра возмущения рассматриваемые волны можно представить как плоские. Тогда все частицы движутся параллельно направлению распространения волны. На фронте плоской продольной волны имеется следующая аналитическая зависимость для плоского напряженного состояния $\sigma_y = -|\sigma_0|$. Отсюда видим, что точное решение задачи соответствует воздействию σ_0 (рис. 2).

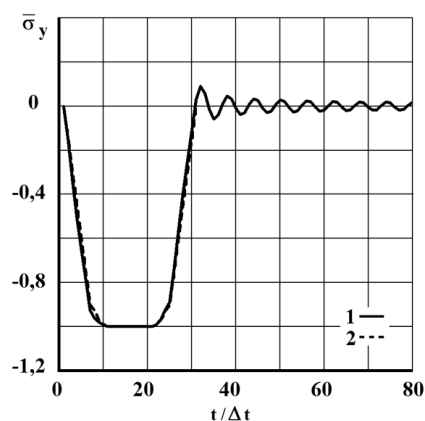


Рис. 3. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ во времени $t/\Delta t$ в точке В1: 1 – численное решение; 2 – аналитическое решение

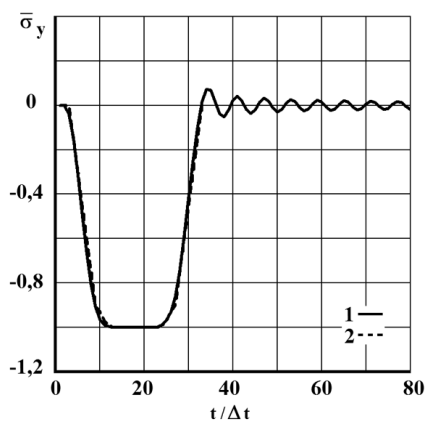


Рис. 4. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ во времени $t/\Delta t$ в точке В2: 1 – численное решение; 2 – аналитическое решение

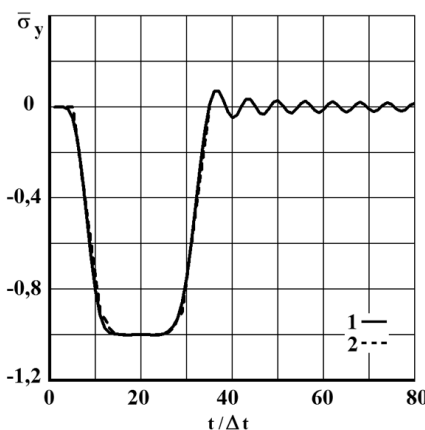


Рис. 5. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ во времени $t/\Delta t$ в точке В3: 1 – численное решение; 2 – аналитическое решение

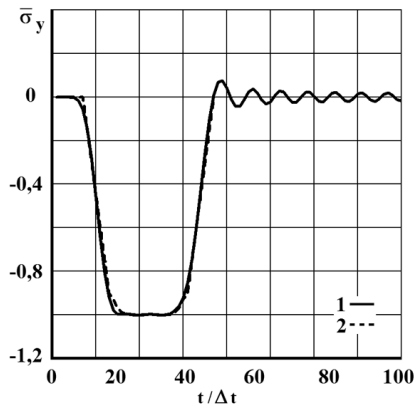


Рис. 6. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ во времени $t/\Delta t$ в точке В4:
1 – численное решение;
2 – аналитическое решение

Для нормального напряжения σ_y имеет-ся хорошее качественное и количественное совпадение с результатом аналитического решения. На основании проведенных исследований можно сделать вывод о физической достоверности результатов численного решения задач при распространении нестационарных упругих волн в деформируемых телах.

Сравнение результатов нормальных напряжений, полученных с помощью метода конечных элементов в перемещениях, при решении задачи о распространении плоских продольных нестационарных упругих волн в полуплоскости с результатами аналитического решения, показало хорошее совпадение.

Список литературы

1. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений

в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11. – С. 10–14.

2. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 12–1. – С. 28–32.

3. Мусаев В.К. Оценка точности и достоверности численного моделирования при решении задач об отражении и интерференции нестационарных упругих волн напряжений // Успехи современного естествознания. – 2015. – № 1–7. – С. 1184–1187.

4. Мусаев В.К. Численное решение задачи о распространении нестационарных упругих волн напряжений в подкрепленном круглом отверстии // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 2. – С. 93–97.

5. Мусаев В.К. Решение задачи о распространении плоских продольных волн в виде импульсного воздействия // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 4–2. – С. 326–330.

6. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных стоячих упругих волн в бесконечной полосе при воздействии в виде треугольного импульса // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 11–2. – С. 248–251.

7. Мусаев В.К. Математическое моделирование нестационарного аварийного выброса нефти в сложной многофазной деформируемой среде // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2016. – № 3–1. – С. 28–32.

8. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных волн напряжений в бесконечной пластинке при вертикальном сосредоточенном упругом ударном воздействии // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2016. – № 3–1. – С. 33–37.

9. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных волн напряжений в задаче о воздействии воздушной ударной волны на консоль (соотношение ширины к высоте один к десяти) с упругой полуплоскостью // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2016. – № 3–1. – С. 38–42.

10. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в защитном сооружении с основанием (полуплоскость) при воздействии ударной волны от лавины // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2016. – № 3–1. – С. 43–46.