УДК 532.51: 551.511.32

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ ДЛЯ ПЛАНЕТЫ СО СЛОЖНЫМ РЕЛЬЕФОМ

Ткаченко О.П.

Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск, e-mail: tkachenko_oleg@mail.ru

Задача поставлена в контексте проблемы математического моделирования климата планеты. Представлены трехмерные уравнения движения атмосферы, содержащие явно выделенный малый параметр. На основе предложенной замены переменных выполнено преобразование уравнений Навье-Стокса от сферических координат к специальным координатам. В этих новых координатах вычислены символы Кристоффеля и компоненты метрического тензора. Этот подход позволит учесть влияние сложного рельефа на атмосферные явления, которым ранее пренебрегалось. Таким образом, построена новая математическая модель кинематики и динамики атмосферы планеты. Из этой модели, выполняя асимптотические разложения решений уравнений по различным входящим в нее малым параметрам, можно получать частные подмодели для упрощенных задач. Сформулирована новая задача получения уравнений теплового баланса, преобразованных к предложенным переменным.

Ключевые слова: динамика атмосферы, криволинейная система координат, замена переменных

MATHEMATICAL MODEL OF DYNAMICS OF THE ATMOSPHERE FOR THE PLANET WITH COMPLEX RELIEF

Tkachenko O.P.

Computer Center, Far East Branch, Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, e-mail: tkachenko_oleg@mail.ru

The objective set in the context of the problem of mathematical modeling of climate of the planet. This paper presents the three-dimensional equations of movement of atmosphere containing the small parameter. The transformation of the Navier-Stokes equations in spherical coordinates to special coordinates was performed. The symbols of Cristoffel and the components of metric tensor was derived. This approach allows us to consider the influence of complex relief on atmospheric phenomena, which previously neglected. Thus, the new mathematical model of the dynamics of the planet's atmosphere was constructed. From this model, performing asymptotic expansions of solutions of the equations by various included in it small parameters, is possible to receive private sub-models for simplified tasks. New task of obtaining the heat balance equations transformed to the proposed variables was formulated.

Keywords: dynamics of atmosphere, curvilinear coordinate system, change of variables

Исследование движения атмосферы является актуальной задачей геофизической гидродинамики. Уравнения движения принято записывать в квазигоризонтальной форме [2], в которой по высоте вводится гидростатическое приближение

$$\partial p / \partial z = -g\rho, \qquad (1)$$

где z – высота над уровнем моря, p – давление, ρ – плотность, g – ускорение свободного падения. Но локально в атмосфере на малых высотах могут существовать области, в которых $grad\, p = 0$ для конечных интервалов времени, как правило, в местах со сложным рельефом. На вопрос о влиянии этих областей на динамику относительно большой окрестности атмосферы обращать внимание не было принято. В то же время исследование многомасштабных явлений актуально в связи с задачей точного долговременного прогноза погоды.

Для исследования этого вопроса необходимы трехмерные уравнения движения сжимаемого вязкого газа над поверхностью планеты со сложным рельефом. Здесь выписаны такие уравнения в форме, пригодной для изучения газодинамических процессов. Для выбора различных асимптотик, в том числе квазигоризонтального приближения, уравнения содержат характерные масштабы и малый параметр.

Целью данной работы является построение математической модели кинематики и динамики атмосферы, которая имеет общий характер. Из этой модели, выполняя асимптотические разложения решений уравнений по различным входящим в нее малым параметрам, можно получать частные подмодели для упрощенных задач.

Автор выражает благодарность своему Учителю, академику РАН Вениамину Петровичу Мясникову, за формулировку этой задачи (и многих других задач), и плодотворные обсуждения научных проблем.

1. Соотношения между физическими параметрами атмосферы

За малый параметр естественно принять величину $\varepsilon = H / r_0$, где H – высота однородной атмосферы, r_0 – средний радиус планеты. Выражение для H есть в [2]:

$$H = {RT_0}/{g} = {p_0}/{\rho_0 g}, \qquad (2)$$

где $R \approx 287$ Дж/кг К – газовая постоянная воздуха, p_0, ρ_0 – соответствующие температуре T_0 давление и плотность воздуха. При $T_0 = 273$К высота $H \approx 8$ км.

Для замены переменных $r \to z(r,\lambda,\theta)$ необходимо выбрать характерный масштаб $\bar{r}$, при этом величина $\omega\bar{r}$ будет характерной скоростью для сохранения нелинейных слагаемых в горизонтальном приближении. Здесь ω – угловая скорость вращения планеты. В качестве уравнения состояния выберем

$$p = \rho RT, \qquad (3)$$

считая воздух идеальным газом. Учитывая выражение для скорости звука

$$c^2 = \kappa RT, \quad \kappa = {c_p}/{c_v},$$

можно выбрать масштаб скорости $\omega\bar{r} = \sqrt{RT_0}$, откуда получим $\bar{r} = {\sqrt{RT_0}}/{\omega}$.

2. Замена переменных

Пусть выбрана сферическая система координат (r,λ,θ) с началом в центре планеты и долготой λ. Сделаем замену переменной, предложенную академиком В.П. Мясниковым на семинаре в ИАПУ ДВО РАН в 2002 году:

$$r = \bar{r}(1 + \varepsilon(z + z_0(\lambda,\theta))), \qquad (4)$$

где z – новая безразмерная переменная, $z_0(\lambda,\theta)$ – известная функция рельефа поверхности планеты.

С процессом замены переменных связана одна тонкость. Уравнения движения жидкости записаны в инвариантной относительно преобразования координат форме [4]. При покомпонентной записи векторных дифференциальных операторов в различных координатах появляются дополнительные слагаемые без операций дифференцирования, вид и количество которых зависит от выбранной системы координат. Поэтому если от уравнений, выписанных, например, в декартовых координатах, по правилам замены переменных, принятым в скалярном математическом анализе (см. [3]), перейти к другим криволинейным координатам, то вид уравнений может получиться неверным.

Необходимо исходить из инвариантных уравнений движения при переходе к конкретной системе координат. Будем считать, что движение атмосферы можно описать уравнениями Навье-Стокса для сжимаемой жидкости [4]:

$$a^i = F^i - \frac{1}{\rho} g^{ij} \frac{\partial p}{\partial x^j} + \\ + \frac{\lambda+\mu}{\rho} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}(\operatorname{div}\vec{v}) + \frac{\mu}{\rho}\nabla^\beta\nabla_\beta v^i. \qquad (5)$$

Здесь g^{ij} – компоненты метрического тензора в выбранной системе координат, ∇_β – ковариантная производная, $\vec{v}$ – вектор скорости, $\vec{a}$ – вектор ускорения, $\vec{F}$ – вектор плотности внешних сил, μ – коэффициент вязкости, λ – дополнительный коэффициент вязкости. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Компоненты вектора ускорения выражаются через скорость [4]:

$$a^j = \frac{\partial v^j}{\partial t} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} v^i + \sum_{\beta \neq j} \frac{v^j v^\beta}{g_{jj}} \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^\beta} + \\ + \frac{1}{2} \frac{(v^j)^2}{g_{jj}} \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^j} - \sum_{\beta \neq j} \frac{(v^\beta)^2}{2 g_{jj}} \frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^j}, \qquad (6)$$

суммирование по j отсутствует. В качестве уравнения состояния выберем (3). В связи с вращением планеты в $\vec{F}$, кроме силы тяжести, войдут кориолисова и центробежная силы. Выражения для этих сил, если включать их в правую часть уравнений движения, следующие [1]:

$$\vec{F}_k = 2[\vec{\omega} \times \vec{v}], \quad \vec{F}_c = \frac{1}{2}\nabla[\vec{\omega} \times \vec{r}]^2. \qquad (7)$$

Здесь обозначено: $\vec{F}_k$ – кориолисова сила на единицу массы, $\vec{F}_c$ – центробежная сила на единицу массы, $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения планеты, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки. В сферических координатах $\vec{r} = (r,0,0)$, $\vec{\omega} = (\omega\cos\theta, 0, -\omega\sin\theta)$. Координаты пронумерованы следующим образом: $x_1 = r$, $x_2 = \lambda$ (долгота), $x_3 = \theta$.

3. Уравнения движения и неразрывности в преобразованной системе координат

Для нахождения вида уравнений Навье-Стокса при замене переменной (4) в координатах (z,λ,θ) были вычислены векторы базиса, компоненты метрического тензора и символы Кристоффеля по формулам из [4]. Мы не приводим здесь эти результаты из-за громоздкости полученных формул. Относительно физических компонент вектора скорости и параметров p, ρ получились, с учетом (7), следующие уравнения движения:

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}+\frac{u_z}{\varepsilon \bar{r}}\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{u_\lambda}{\bar{r}r'\sin\theta}\frac{\partial u_z}{\partial \lambda}+\frac{u_\theta}{\bar{r}r'}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}-\frac{u_\lambda^2+u_\theta^2}{\bar{r}r'}-$$

$$-2\cdot u_\lambda \omega \sin\theta=-g+\bar{r}r'\omega^2\sin^2\theta-\frac{1}{\varepsilon \bar{r}\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+$$

$$+\frac{\mu}{\rho \bar{r}^2 r'^2}\left[\frac{r'^2}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \lambda^2}+\frac{2r'}{\varepsilon}\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\mathrm{ctg}\theta\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda}+2\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+2u_z+2u_\theta\,\mathrm{ctg}\theta\right)\right];$$

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}+\frac{u_z}{\varepsilon \bar{r}}\frac{\partial u_\lambda}{\partial z}+\frac{u_\lambda}{\bar{r}r'\sin\theta}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda}+\frac{u_\theta}{\bar{r}r'}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \theta}+\frac{u_\lambda}{\bar{r}r'}(u_z+u_\theta ctg\theta)+$$

$$+2\omega(u_\theta\cos\theta+u_z\sin\theta)=-\frac{1}{\rho \bar{r}r'\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \lambda}+\frac{\mu}{\rho \bar{r}^2 r'^2}\left[\frac{r'^2}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial z^2}+\right.$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial \lambda^2}+\frac{2r'}{\varepsilon}\frac{\partial u_\lambda}{\partial z}+\frac{\partial u_\lambda}{\partial \theta}\mathrm{ctg}\theta\right)+\frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial u_z}{\partial \lambda}+$$

$$\left.+\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \lambda}-\frac{u_\lambda}{\sin^2\theta}\right];$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+\frac{u_z}{\varepsilon \bar{r}}\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{u_\lambda}{\bar{r}r'\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \lambda}+\frac{u_\theta}{\bar{r}r'}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{1}{\bar{r}r'}(u_z u_\theta-u_\lambda^2 ctg\theta)-$$

$$-2\omega u_\lambda\cos\theta=\bar{r}r'\omega^2\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{\rho \bar{r}r'}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\frac{\mu}{\rho \bar{r}^2 r'^2}\left[\frac{r'^2}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \lambda^2}+\frac{2r'}{\varepsilon}\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\mathrm{ctg}\theta\right)+2\frac{\partial u_z}{\partial \theta}-2\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda}-\frac{u_\theta}{\sin^2\theta}\right];$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{2\rho u_z}{\bar{r}r'}+\frac{1}{\varepsilon \bar{r}}\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}+\frac{1}{\bar{r}r'\sin\theta}\frac{\partial(\rho u_\lambda)}{\partial \lambda}+\frac{\rho u_\theta}{\bar{r}r'}\mathrm{ctg}\theta+\frac{1}{\bar{r}r'}\frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta}=0. \qquad (8)$$

$$r'=1+\varepsilon(z+z_0);\quad r=\bar{r}(1+\varepsilon(z+z_0)).$$

Таким образом, получена система уравнений движения с выделенным постоянным малым параметром ε. Такой подход позволит использовать различные асимптотики решения (8) для разных областей с их последующим сращиванием. Уравнения движения должны быть дополнены уравнениями теплового баланса [2], преобразованными аналогичным образом.

Заключение

Получены трехмерные уравнения движения атмосферы, с явно выделенным малым параметром. Переход к специальным криволинейным координатам позволит учесть влияние сложного рельефа на атмосферные явления, которым ранее пренебрегалось. Кроме того, новая модель позволит исследовать явления различного масштаба в рамках единого подхода. В процессе проведенного анализа возникла новая задача формулировки уравнений теплового баланса, преобразованных к переменным, использованным в основной модели.

Главным результатом статьи является алгоритм применения замены переменной (4) к общим уравнениям гидродинамики, записанным в сферических координатах, и полученная в результате математическая модель.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика.– М.: Наука, 1988.– 736 с.

2. Монин А.С. Теоретические основы геофизической гидродинамики.– Л.: Гидрометеоиздат, 1988.– 424 с.

3. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики.– СПб.: Лань, 1999.– 736 с.

4. Седов Л.И. Механика сплошной среды.– Т.1.– М.: Наука, 1976.– 536 с.