

УДК 538.56:538.542.001.24

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАТОРНОГО МЕТОДА И ИНТЕГРАЛА ДЮАМЕЛЯ ДЛЯ РАСЧЕТА УСРЕДНЕННЫХ ВО ВРЕМЕНИ ПАРАМЕТРОВ СКИН-СЛОЯ МАССИВНЫХ ПРОВОДНИКОВ ПРИ ДИФФУЗИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Носова М.Г.

ФГБОУ ВО «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники»,
Томск, e-mail: nosovamgm@gmail.com

Предложена методика определения усредненных во времени параметров скин-слоя массивных проводников при диффузии электромагнитного поля с заданной магнитной напряженностью на поверхности проводника. Эта методика основывается на операторном методе и интеграле Дюамеля, и может использоваться для расчета работающих в переходном режиме токоподводящих шин, электромагнитных экранов, роторов и обмоток электромашинных генераторов, обрабатываемых электромагнитным давлением металлических деталей. Методика получена на основе уравнений электромагнитного поля и может быть запрограммирована, например, в среде Mathcad для инженерного расчета усредненных во времени параметров массивных проводников электротехнических устройств при их автоматизированном проектировании. Толщины скин-слоя, активное сопротивление и внутренняя индуктивность проводника, максимальное давление поля на проводник зависят от амплитуды, длительности и формы импульса магнитной напряженности на поверхности проводника.

Ключевые слова: операторный метод, интеграл Дюамеля, скин-слой, сопротивление, индуктивность, давление

APPLICATION OF OPERATOR METHOD AND DUHAMEL INTEGRAL TO CALCULATION OF AVERAGE TIME-DEPENDENT PARAMETERS OF THE SKIN-LAYER OF MASSIVE CONDUCTORS IN DIFFUSION OF ELECTROMAGNETIC FIELD

Nosova M.G.

TUSUR University, Tomsk, e-mail: nosovamgm@gmail.com

Method proposed for the determination of average time-dependent parameters of the skin-layer of massive conductors in diffusion of electromagnetic field with a given magnetic strength on the surface of the conductor. This method is based on the operator method and Duhamel integral, and can be used to calculate operating in a transient mode the current-carrying buses, electromagnetic shielding, rotors and windings of dynamo-electric generator, electromagnetic pressure processed metal. The method was obtained on the basis of equations of the electromagnetic field, which can be programmed, for example, in Mathcad for engineering calculations of average time-dependent parameters of massive conductors pulsed electrical devices, when they aided design. The thicknesses of the skin-layer, resistance and internal inductance of the conductor, the maximum pressure of the field on the conductor depends on the amplitude, duration and pulse shape of the magnetic intensity at the surface of the conductor.

Keywords: operator method, Duhamel integral, skin-layer, resistance, inductance, pressure

Многие электротехнические устройства, работающие в переходном режиме, имеют такие массивные проводники как токоподводящие шины, электромагнитные экраны, обрабатываемые электромагнитным давлением металлические детали, роторы и обмотки электромашинных генераторов. При исследовании таких устройств возникает необходимость расчета диффузии (проникновения) электромагнитного поля в массивные проводники. Для решения уравнений электромагнитного поля в переходном режиме могут быть использованы операторный метод и интеграл Дюамеля [7, 8] с целью определения магнитной напряженности и плотности тока в поверхностном слое (скин-слое) массивных проводников. На основании найденных магнитной напряженности и плотности тока рассчитываются такие

усредненные во времени параметры скин-слоя как толщина скин-слоя, активное сопротивление и внутренняя индуктивность, максимальное давление электромагнитного поля на проводник. Применение усредненных во времени параметров скин-слоя значительно упрощает расчет, исследование и оптимизацию электротехнических устройств с массивными проводниками [3–6, 9]. Однако частотный метод вычисления параметров скин-слоя требует большого объема автоматизированных расчетов при больших затратах времени [4].

Поэтому разработка методики расчета диффузии электромагнитного поля операторным методом и интегралом Дюамеля для определения параметров скин-слоя массивных проводников с целью сокращения объема и времени расчетов представляется актуальной задачей.

Допущения

Для получения расчетных формул сделаем следующие допущения.

1. Скин-слой проводника характеризуется постоянными величинами магнитной проницаемости μ (Гн/м) и удельной проводимости γ (1/Ом·м).

2. Размеры массивных проводников и радиусы кривизны их поверхностей существенно превосходят глубину проникновения в них электромагнитного поля, поэтому будем исходить из представления о плоской одномерной электромагнитной волне, проникающей в проводник как в проводящее полупространство перпендикулярно его поверхности и полностью затухающей в его теле [3, 9].

3. Электромагнитное поле задается магнитной напряженностью на поверхности проводника $H_s(t)$.

4. Электромагнитное поле в проводнике имеет нулевые начальные условия, т.е. при времени $t=0$ поле в проводнике полностью отсутствует даже если $H_s(0) \neq 0$.

Методика расчета

Совместим внешнюю поверхность проводника как поверхность проводящего полупространства с плоскостью xOy в декартовой системе координат (рис. 1), так что для плоской одномерной электромагнитной волны векторы напряженностей электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей имеют по одной составляющей, зависящих от координаты z и времени t [3, 9]:

$$\vec{E} = E_x(z,t) \cdot \vec{1}_x; \quad \vec{H} = H_y(z,t) \cdot \vec{1}_y,$$

где $\vec{1}_x, \vec{1}_y$ – единичные векторы, направленные по осям x и y соответственно.

В этом случае процесс проникновения электромагнитного поля в проводник описывается следующим уравнением [3, 9]

$$\frac{\partial^2 H_y(z,t)}{\partial z^2} = \mu \gamma \frac{\partial H_y(z,t)}{\partial t} \quad (1)$$

при плотности тока

$$\delta_x(z,t) = \gamma E_x(z,t) = -\frac{\partial H_y(z,t)}{\partial z}. \quad (2)$$

Примем, что при $z \rightarrow \infty$ электромагнитная волна полностью затухает, тогда граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} H_y(0,t) &= H_s(t); \\ H_y(\infty,t) &= 0; \quad \delta_x(\infty,t) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Запишем при нулевых начальных условиях

$$H_y(z,0) = 0; \quad \delta_x(z,0) = 0 \quad (4)$$

уравнения (1) и (2) в операторном виде [5, 7]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H_y(z,p)}{dz^2} &= \mu \gamma p H_y(z,p); \\ \delta_x(z,p) &= -\frac{d H_y(z,p)}{dz}. \end{aligned} \quad (5)$$

Если на поверхности проводника задана напряженность

$$H_s(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ H_0 = \text{const} & \text{при } t > 0, \end{cases} \quad (6)$$

тогда решением уравнений (5) будут операторные изображения напряженности [5, 7]

$$H_y(z,p) = \frac{H_0 \exp(-z\sqrt{\mu\gamma p})}{p} \quad (7)$$

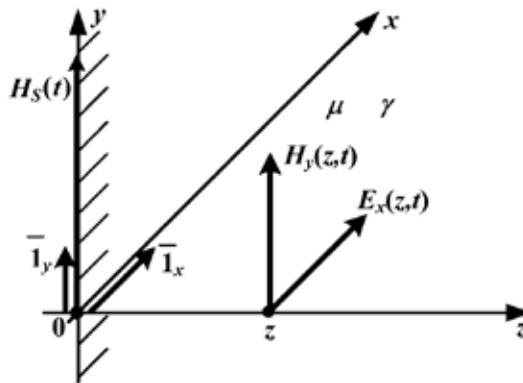


Рис. 1. Проводящее полупространство:
 $H_s(t) = H_y(0,t)$ – магнитная напряженность на поверхности проводника

и плотности тока

$$\delta_x(z, p) = \frac{\sqrt{\mu\gamma} H_0 \exp(-z\sqrt{\mu\gamma p})}{\sqrt{p}}. \quad (8)$$

Оригиналы (7, 8) будут такими [2, 5]:

$$H_{0y}(z, t) = H_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2}\sqrt{\frac{\mu\gamma}{t}}\right); \quad (9)$$

$$\delta_{0x}(z, t) = H_0 \sqrt{\frac{\mu\gamma}{\pi t}} \exp\left(-\frac{\mu\gamma z^2}{4t}\right), \quad (10)$$

где указан дополнительный интеграл вероятностей:

$$\operatorname{erfc}(U) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_U^\infty \exp(-u^2) du;$$

$$U = \frac{z}{2} \sqrt{\frac{\mu\gamma}{t}}.$$

Далее если полагать, что на проводник при $z=0$ и $t=\xi > 0$ воздействует бесконечно малая постоянная напряженность $H_0 = dH_S$, тогда на основании (9, 10) с использованием интеграла Дюамеля [8] можно записать напряженность

$$H_y(z, t) = H_S(0) \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2}\sqrt{\frac{\mu\gamma}{t}}\right) + \int_0^t H_S'(\xi) \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2}\sqrt{\frac{\mu\gamma}{t-\xi}}\right) d\xi \quad (11)$$

и плотность тока

$$\delta_x(z, t) = H_S(0) \sqrt{\frac{\mu\gamma}{\pi t}} \exp\left(-\frac{\mu\gamma z^2}{4t}\right) + \int_0^t H_S'(\xi) \sqrt{\frac{\mu\gamma}{\pi(t-\xi)}} \exp\left[-\frac{\mu\gamma z^2}{4(t-\xi)}\right] d\xi, \quad (12)$$

где $H_S'(\xi) = dH_S(\xi)/d\xi$ – производная напряженности на поверхности проводника при $z=0$ и $t=\xi$.

Затем находим усредненную во времени мощность тепловых потерь [3–5, 9]

$$P(t) = \frac{l_x l_y}{\gamma t} \int_0^t \int_0^\infty \delta_x(z, t)^2 dz dt \quad (13)$$

и усредненную энергию магнитного поля

$$W(t) = \frac{\mu l_x l_y}{2t} \int_0^t \left[\int_0^\infty H_y(z, t)^2 dz \right] dt, \quad (14)$$

l_x и l_y – размеры проводника по осям x и y соответственно (рис. 1).

При среднеквадратичной напряженности на поверхности проводника

$$H(t) = \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t H_S(t)^2 dt} \quad (15)$$

согласно закону полного тока [9] имеем для тока $i(t)$ в проводнике среднеквадратичную функцию времени:

$$I(t) = H(t) \cdot l_y = \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t i(t)^2 dt}. \quad (16)$$

При активном сопротивлении

$$R(t) = \frac{l_x}{\gamma \Delta_R(t) l_y} \quad (17)$$

и внутренней индуктивности проводника

$$L(t) = \frac{\mu \Delta_L(t) l_x}{l_y} \quad (18)$$

запишем усредненные во времени мощность тепловых потерь

$$P(t) = I(t)^2 R(t), \quad (19)$$

и энергию магнитного поля

$$W(t) = \frac{L(t) I(t)^2}{2}, \quad (20)$$

где $\Delta_R(t)$, $\Delta_L(t)$ – усредненные во времени толщины скин-слоя для расчета сопротивления и внутренней индуктивности соответственно.

Из равенства (13, 19) и (14, 20), с учетом (15–18), определяем усредненные во времени толщины скин-слоя для расчета сопротивления и внутренней индуктивности:

$$\Delta_R(t) = \frac{\int_0^t H_S(t)^2 dt}{\int_0^t \left[\int_0^\infty \delta_x(z, t)^2 dz \right] dt};$$

$$\Delta_L(t) = \frac{\int_0^t \left[\int_0^\infty H_y(z, t)^2 dz \right] dt}{\int_0^t H_S(t)^2 dt}. \quad (21)$$

Давление электромагнитного поля на проводник, которое направлено вдоль оси z (рис. 1), найдем следующим образом [3, 4]:

$$\sigma_z(t) = \mu \int_0^{\infty} [\delta_x(z,t) H_y(z,t)] dz, \quad (22)$$

причем это давление имеет некоторое максимальное значение σ_m , которое должно быть меньше допустимого значения $\sigma_{\text{доп}}$, исходя из механической прочности проводника.

Результаты расчета

При угловой частоте $\omega = m\pi/\tau$ радиопульса напряженности с синусным заполнением

$$H_s(t) = \begin{cases} H_m \sin\left(\frac{m\pi}{\tau}t\right) & \text{при } 0 < t < \tau; \\ 0 & \text{при } t > \tau \end{cases} \quad (23)$$

при $H_m = 10^7$ (А/м); $\tau = 0,01$ (с) по запрограммированным в среде Mathcad [1] формулам (1–23) проведены расчеты параметров массивного проводника из отожженной меди [10]: $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (Гн/м); $\gamma = 50 \cdot 10^6$ (См/м); $\sigma_{\text{доп}} \approx 200$ (МПа).

Рассчитанные параметры этого проводника приведены в таблице, где также указаны относительные толщины скин-слоя, найденные в [4] и [6] частотным и численным методами. В таблице обозначена для синусоидального электромагнитного поля с угловой частотой ω в установившемся режиме эквивалентная глубина проникновения $\Delta = \sqrt{2/\mu\gamma\omega}$, причем во всех случаях максимум давления $\sigma_m = \mu H_m^2/2 = 62,83$ (МПа).

На рис. 2 и 3 при напряженности (23) и $m=2$ приведены расчетные графики относительных зависимостей магнитной напряженности и плотности тока от координаты z/Δ , где H_m, δ_m – максимальные значения напряженности и плотности тока.

Параметры скин-слоя массивного медного проводника

Расчет					Из [4]		Из [6]	
m	ω	Δ	$\Delta_R(\tau)/\Delta$	$\Delta_L(\tau)/\Delta$	$\Delta_R(\tau)/\Delta$	$\Delta_L(\tau)/\Delta$	$\Delta_R(\tau)/\Delta$	$\Delta_L(\tau)/\Delta$
–	1/с	мм	–	–	–	–	–	–
0,5	157,1	14,2	1,235	0,332	1,155	0,352	1,35	0,25
1	314,2	10,0	1,446	0,570	1,366	0,585	1,55	0,50
1,5	471,2	8,2	1,059	0,513	0,996	0,538	1,15	0,45
2	628,3	7,1	1,120	0,542	1,057	0,572	1,20	0,50
2,5	785,4	6,4	1,034	0,499	0,971	0,529	1,07	0,50
3	942,5	5,8	1,094	0,53	1,032	0,553	1,05	0,50
3,5	1100	5,4	1,024	0,505	0,962	0,534	1,04	0,50
4	1257	5,0	1,061	0,523	1,001	0,553	1,03	0,50
4,5	1414	4,7	1,018	0,502	0,957	0,533	1,00	0,50
5	1571	4,5	1,052	0,519	0,994	0,544	1,00	0,50

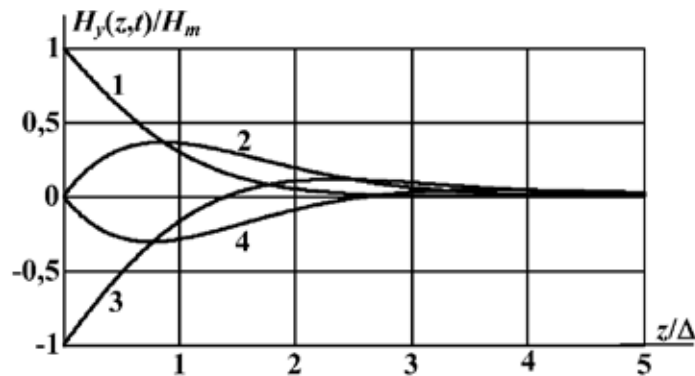


Рис. 2. Расчетные графики относительных зависимостей магнитной напряженности $H_y(z,t)/H_m$ от относительной координаты z/Δ для различных моментов времени: 1 – $t = 0,25\tau$; 2 – $t = 0,5\tau$; 3 – $t = 0,75\tau$; 4 – $t = \tau$

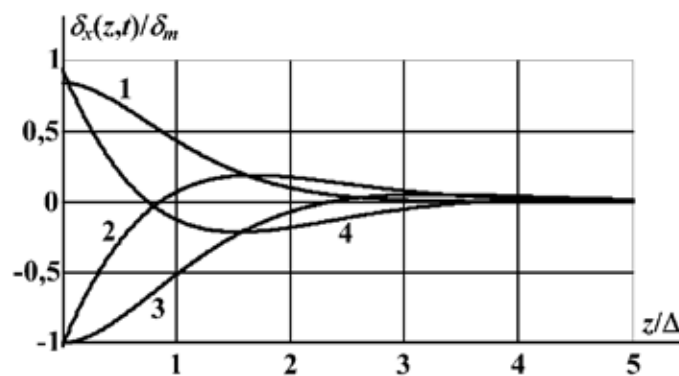


Рис. 3. Расчетные графики относительных зависимостей плотности тока $\delta_x(z,t)/\delta_m$ от относительной координаты z/Δ для различных моментов времени:
 1 – $t = 0,25\tau$; 2 – $t = 0,5\tau$; 3 – $t = 0,75\tau$; 4 – $t = \tau$

Заключение

1. Предложена методика определения усредненных во времени параметров скин-слоя массивных проводников при диффузии электромагнитного поля с заданной магнитной напряженностью на поверхности проводника, которая основывается на операторном методе и интеграле Дюамеля, и может использоваться для расчета работающих в переходном режиме токоподводящих шин, электромагнитных экранов, роторов и обмоток электромашинных генераторов, обрабатываемых электромагнитным давлением металлических деталей.

2. Разработанная методика получена на основе уравнений электромагнитного поля, которая может быть запрограммирована, например, в среде Mathcad для инженерного расчета усредненных во времени параметров массивных проводников электротехнических устройств при их автоматизированном проектировании. При этом объем и время вычислений существенно меньше объема и времени расчетов по сравнению с частотным методом.

3. Определяемые толщины скин-слоя, активное сопротивление и внутренняя индуктивность проводника, максимальное давление электромагнитного поля на проводник зависят от амплитуды, длительности и формы импульса магнитной напряженности на поверхности проводника.

4. Достоверность предлагаемой методики подтверждается удовлетворительным совпадением результатов расчета усредненных во времени толщин скин-слоя с результатами, полученными другими авторами.

Список литературы

1. Дьяконов В.П. Mathcad 8/2000: специальный справочник. – СПб.: Изд-во Питер, 2000. – 592 с.
2. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1974. – 832 с.
3. Немков В.С. Теория и расчет устройств индукционного нагрева / В.С. Немков, В.Б. Демидович. – Л.: Энергоатомиздат, 1988. – 280 с.
4. Носов Г.В., Косилова Д.Ю. Применение частотного метода для расчета эквивалентных параметров скин-слоя массивных проводников при импульсном электромагнитном поле // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 2; URL: <http://www.science-education.ru/116-12326> (дата обращения: 11.03.2014).
5. Носов Г.В. Эквивалентные параметры скин-слоя массивных проводников: расчет и анализ. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012. – 195 с.
6. Петров С.Р. Расчет эквивалентных параметров скин-слоя с учетом джоулева нагрева // Электричество. – 1987. – № 6. – С. 61–63.
7. Сборник задач по теоретическим основам электротехники / под ред. Л.А. Бессонова. – М.: Высшая школа, 1988. – 543 с.
8. Теоретические основы электротехники: учебник для вузов / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин. – СПб.: Питер, 2003. – Т. 2. – 576 с.
9. Теоретические основы электротехники: учебник для вузов / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин. – СПб.: Питер, 2003. – Т. 3. – 377 с.
10. Электротехнический справочник / под общ. ред. проф. МЭИ В.Г. Герасимова и др. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – Т. 1. – 488 с.