УДК 621.01

УСЛОВИЯ ПЛАВНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ПЕРЕХОДНОГО УЧАСТКА

Бостанов Б.О.

РГП на ПХВ «Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева», Астана, e-mail: bostanov_bayandy@mail.ru

Рассмотрена беговая дорожка асиметричного планетарного вибровозбудителя (АПВ) комбинированной формы, состоящей из дуг окружности и эллипса (коники). При переходе из одной части в другую, в точках соединения возникает разрыв кривизны, вызывающий скачок центробежной силы. Для того чтобы между соединяемыми дугами коник не было скачка кривизны, необходимо вставить сглаживающий переходной участок в виде другой коники. Используя малоизвестные свойства коник определен коэффициент, связывающий радиусы кривизны двух точек с элементами коники. Найденный коэффициент позволяет определить места соединения коник для обеспечения непрерывной кривизны.

Ключевые слова: коника, радиус кривизны, скачок кривизны, переходная кривая

CONDITIONS OF SMOOTHLY MATING THE TRANSITION PORTION

Bostanov B.O.

Eurasian National university n.a. L.N.Gumilyov, Astana, e-mail: bostanov_bayandy@mail.ru

Treadmill (for asymmetric planetary exciters) in combined form is considered consists of arcs of a circle and an ellipse (conics). In connection points there is a gap of curvature, at the transition from one part to another. It causes jump centrifugal force. Between these conics should not be a jump curvature, therefore to insert smooth transition curve in the form of another conic.By using a little-known properties of conics it was determined coefficient relating the radii of curvature of the two points of the conic. Found a factor to determine the junction conic to provide continuous curvature.

Keywords: conic, curvature radius, a jump curvature, a transition curve

Использование вибровозбудителей планетарного типа в дорожном строительстве является одним из эффективных методов повышения производительности уплотняющих машин. Широко исследованы и применяются на практике симметричные планетарные вибровозбудители, центр вращения которых совпадает с центром кривизны круговой беговой дорожки [1], но практически не исследованы планетарные вибровозбудители с некруглой (комбинированной) беговой дорожкой [2]. В инженерной практике требуется, чтобы в местах соединения непрерывные коники были не только гладкими, но и плавными.

Цель исследования – определение условий безударного соединения комбинированной беговой дорожки планетарного вибровозбудителя, установленного в вальцах дорожных катков и взаимодействующие с уплотняемой средой.

Материалы и методы исследования

Для исследования рассматривается математическая модель планетарного вибровозбудителя с комбинированной формой беговой дорожки и методика аналитического исследования с применением аппарата дифференциальной и аналитической геометрии.

Результаты исследования и их обсуждение

Рассмотрим АПВ с беговой дорожкой, составленной из полудуг окружности радиуса a и эллипса с полуоями a и b, форма которых описываются уравнениями $x^2 + y^2 = a^2$ и $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ соответственно. Точки соединения $P(a,\ 0)$ и $P'(-a,\ 0)$ расположены вдоль горизонтальной оси Ox (рис. 1, а).

Окружность является кривой, радиус кривизны которой в любой точке одинаков и равен радиусу самой окружности, т.е. $\rho = a$, а для эллипса радиус кривизны в любой точке вычисляется по формуле $\rho=\frac{\left(b^4x^2+a^4y^2\right)^{3/2}}{a^4b^4}$ и является кривой с изменяющимся радиусом кривизны.

Например, если комбинировать беговую дорожку из полудуг окружности $x^2 + y^2 = 12^2$ и эллипса $\frac{x^2}{12^2}+\frac{y^2}{15^2}=1$, то радиусы кривизны в точке $P(12,\ 0)$ равны: для окружности $\rho_{ok} = 12$, для эллипса $\rho_{эл} = 18{,}75$. Аналогичные радиусы кривизны в точке $P'(-12,\ 0)$.

Таким образом, в случае соединения дуги эллипса с дугой окружности с радиусом, равным одному из полуосей, точка соединения имеет общую касательную, но имеет скачок по кривизне.

Инерционный элемент вибровозбудителя совершает движение по комбинированной беговой дорожке, составленной из

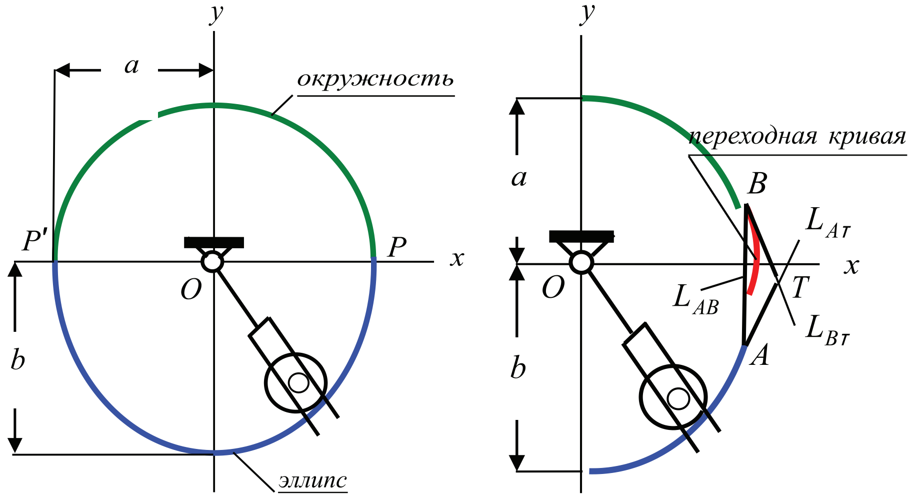

Рис. 1. Вибровозбудитель с комбинированной беговой дорожкой

дуг коник с общей касательной в точках соединения. При переходе из одной части в другую, в точках соединения возникает разрыв кривизны, вызывающий скачок центробежной силы. Для того, чтобы обеспечить переход без скачка необходимо между ними вставить переходный участок в виде дуги кривой, удовлетворяющей условиям (рис. 1, б):

а) дуга должна проходит через точки соединения *A* и *B*;

б) соединяющая и соединяемая части должны имет одинаковую непрерывную первую производную в точках соединения (в этой точке скорости должны быть равными);

в) соединяющая и соединяемая части должны имет одинаковую непрерывную вторую производную в точках соединения (в этой точке радиусы кривизны должны быть равными);

Применяя метод Лайминга [3] можно получить аналитическое выражение соединяющей коники, имеющее две заданные касательные в двух точках и проходящее через третью точку в виде

$$(1-\lambda)\cdot L_{A\tau}\cdot L_{B\tau}+\lambda\cdot L_{AB}^2=0, \qquad (1)$$

Уравнение (1) представляет пучок конических сечений, проходящих через точки *A* и *B*, здесь прямая $L_{A\tau}=0$ является касательной в точке *A*, а прямая $L_{B\tau}=0$ – касательной в точке *B*, прямая $L_{AB}=0$ – хордой, соединяющей точки *A* и *B*.

Параметр λ, определяется заданием точки *M*, если точка *M* имеет координаты x_M и y_M, тогда

$$\lambda=\frac{L_{A\tau}(x_M,y_M)L_{B\tau}(x_M,y_M)}{L_{A\tau}(x_M,y_M)L_{B\tau}(x_M,y_M)-L_{AB}^2(x_M,y_M)}.$$

Следовательно, кривая переходного участка беговой дорожки определяется: двумя точками соединения – точками касания *A* и *B*; точкой пересечения касательных *T*; некоторой точкой *M*. Выбирая точку *M* внутри базисного треугольника Δ*ATB* определяем непрерывную кривую первого порядка гладкости между точками соединения *A* и *B*.

На рис. 2, а представлены несколько вариантов коник переходного участка. Все коники удовлетворяют условиям непрерывности и касания, но в точках *A* и *B* имеют различные радиусы кривизны. Дуги внутри базисного треугольника будут гладкими.

Выбирая параметр λ в уравнений (1) определенным образом, можно получить форму кривой, удовлетворящую условию плавности, а именно, полученная методом Лайминга коника в точках соединения *A* и *B* должна иметь радиусы кривизны, равные заданным радиусам кривизны ρ_A и ρ_B.

Найдем условия, обеспечивающие непрерывность по кривизне и установим некоторые опорные закономерности.

Возьмем две точки $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ на эллипсе с радиусами кривизны ρ_A и ρ_B соответственно и проводим через них касательные $L_{A\tau}$ и $L_{B\tau}$. Касательные $L_{A\tau}$ и $L_{B\tau}$ взаимно пересекаются в точке *T*. Соединив точки *A*, *B* и *T* получаем базисный треугольник Δ*ATT*, составленный из касательных $L_{A\tau}$, $L_{B\tau}$ и хорды L_{AB}. *TC* медиана базисного треугольника.

Обозначим через $l_A = AE$, $l_B = BE$ – длины отрезков касательных $L_{A\tau}$ и $L_{B\tau}$ до их пересечения в точке *T*, $d_A = OA_d$, $d_B = OB_d$ – расстояния от центра *O* до касательных $L_{A\tau}$ и $L_{B\tau}$, $h_A = AA_h$, $h_B = BB_h$ – расстояния точек *A* и *B* до касательных $L_{B\tau}$ и $L_{A\tau}$, $\alpha = \angle BAT$, $\beta = \angle ABT$ – углы между касательными $L_{A\tau}$, $L_{B\tau}$ и хордой *AB*, $\alpha_E = \angle ATT$, $\beta_E = \angle BTT$ – углы между касательными $L_{A\tau}$, $L_{B\tau}$ и медианой *TC*.

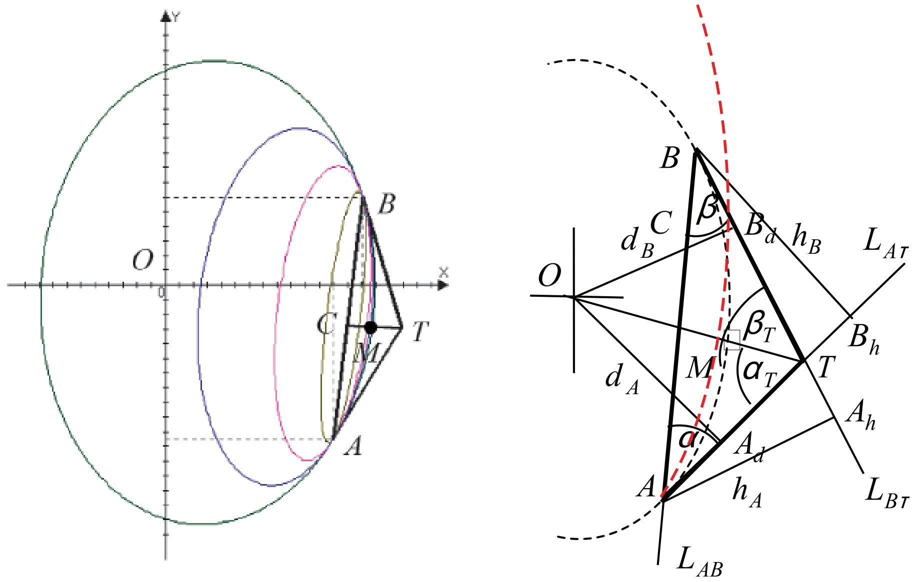

Рис. 2. Кривые Лайминга первого порядка и базисный треугольник

Известно, что радиус кривизны эллипса обратно пропорционален кубу расстояния от центра до касательной в соответствующей точке [4], то есть:

$$\rho_A = \frac{a^2 b^2}{d_A^3}, \quad \rho_B = \frac{a^2 b^2}{d_B^3}.$$

Используя их введем безразмерный коэффициент

$$\eta = \sqrt[3]{\frac{\rho_A}{\rho_B}} = \frac{d_B}{d_A}$$

и назовем коэффициентом отношения радиусов кривизны.

Введенный таким образом коэффициент η в дальнейшем будет играть определяющий роль для нахождения места плавного соединения.

Четыре точки: центр эллипса O, точки основания перпендикуляров A_d и B_d и точка пересечения касательных T находятся на одной окружности (окружность пересечения) [5]. Рассмотрим прямоугольные треугольники ΔOA_dT и ΔOB_dT, вершины которых лежат на окружности пересечения и применяем теорему синусов. Тогда

$$\frac{\sin\beta_E}{\sin\alpha_E} = \frac{d_B}{d_A} = \eta.$$

Теперь рассмотрим треугольники ΔACT и ΔBCT, которых получаем от базисного треугольника делением медианой TC, т.е. $AC = BC$, и аналогично применяя теорему синусов получаем

$$\frac{\sin\beta_E}{\sin\alpha_E} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \eta.$$

Для базисного треугольника ΔATB имеем

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{l_A}{l_B} = \eta.$$

Из прямоугольных треугольников ΔAA_hB и ΔAB_hB с общей гипотенузой AB (хорда) получаем

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{h_A}{h_B} = \eta.$$

Таким образом, если имеем две точки A и B эллипса с радиусами кривизны ρ_A и ρ_B, то отношения между соответствующими элементами базисного треугольника ΔAEB, составленного из касательных $L_{A\tau}$, $L_{B\tau}$ и хорды L_{AB}, равны коэффициенту отношения радиусов кривизны η:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin\beta_E}{\sin\alpha_E} = \frac{d_B}{d_A} = \frac{l_A}{l_B} = \frac{h_A}{h_B} = \eta. \qquad (2)$$

Приведем пример, показывающий связь длин касательных с радиусами кривизны в точках касания. Пусть комбинированная беговая дорожка состоит из полудуг окружности $x^2 + y^2 = 30^2$ и полуэллипса $\frac{x^2}{30^2} + \frac{y^2}{35^2} = 1$. Выберем на эллиптической части стартовую точку – начальную точку сопряжения $A(24; 21)$, где радиус кривизны $\rho_A = 35{,}1253$. Финишная точка – конечная точка сопряжения B на дуге окружности радиуса $\rho_B = 30$ определяется так, чтобы выполнялось условие (2): $\frac{l_A}{l_B} = \eta$. Искомая точка $B(29,2997;\ 6,444)$. Имеем базисный треугольник с вершинами $A(24;\ 21)$, $B(29,2997;\ 6,444)$, $B(32,3899;\ –7,9489)$. Тогда

$$\eta = \sqrt[3]{\frac{\rho_A}{\rho_B}} = 1,0539,$$

$$l_A = 15,5152,\ l_B = 14,7209.$$

Действительно,

$$\frac{l_A}{l_B} = \frac{15,5152}{14,7209} = 1,0539.$$

Заключение

Полученные соотношения (2), характеризующие свойства эллиптической беговой дорожки, позволяет определить положение точки B и построить переходной участок, который обеспечивает безударный переход из одного участка в дру гой участок.

Список литературы

1. Пановко Г.Я. Динамика вибрационных технологических процессов. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» Институт компьютерных исследований, 2009. – 176 с.

2. Бостанов Б.О., Темирбеков Е.С., Дудкин М.В. Планетарный вибровозбудитель с эллиптической дорожкой. Роль механики в создании эффективных материалов, конструкции и машин XXI века // Тр. Всеросс. науч.-техн. конф. – Омск.: СибАДИ, 2006. – С. 66–70.

3. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве: пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 304 с.

4. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М., 1977. – 872 с.

5. Шпигельман М. Эллипсы, параболы и гиперболы в совмещенных полярно-декартовых координатах. – М., 2006. – 460 с.