

УДК 539.3

**МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ  
В БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКЕ ПРИ ВЕРТИКАЛЬНОМ  
СОСРЕДОТОЧЕННОМ УПРУГОМ УДАРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ**

**Мусаев В.К.**

*Московский государственный машиностроительный университет (МГМУ), Москва,  
e-mail: musayev-vk@yandex.ru*

Для прогноза безопасности несущих конструкций технических систем при упругом нестационарном ударном воздействии применяется численное моделирование. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны методика, алгоритм и комплекс программ для решения линейных динамических задач теории упругости. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений. Линейная динамическая задача с начальными и граничными условиями с помощью метода конечных элементов в перемещениях приведена к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями. Задача с начальными условиями с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина приведена к явной двухслойной схеме. Решена задача о распространении нестационарных упругих волн в пластинке (воздействие – сосредоточенное; соотношение толщины пластинки к длине волны воздействия – один к двум). Исследуемая расчетная область имеет 22011 узловых точек. Решается система уравнений из 88044 неизвестных.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, численный метод, алгоритм, комплекс программ, алгоритм Мусаева В.К., упругие волны, нестационарные волновые уравнения, динамика сплошных сред, метод Галеркина, распространение волн, несущая конструкция, техническая система, бесконечная пластинка, сосредоточенное воздействие, ударное воздействие, исследуемая расчетная область

**MODELING OF NON-STATIONARY OF STRESS WAVES IN AN INFINITE PLATE  
UNDER VERTICAL CONCENTRATED ELASTIC IMPACT EFFECT**

**Musayev V.K.**

*Moscow state University of mechanical engineering (MSMU), Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru*

To predict the safety of load-bearing structures of the technical systems with elastic unsteady shock action applied numerical modeling. On the basis of the finite element method in displacements the developed method, algorithm and program complex for solving linear dynamic problems of the elasticity theory. The basic relations of the finite element method is obtained by using principle of possible displacements. Linear dynamic problem with initial and boundary conditions using the finite element method in displacements given to the system of linear ordinary differential equations with initial conditions. The problem with the initial conditions using a finite element Galerkin method provides options for explicit two-layer scheme. The problem of propagation of nonstationary elastic waves in the plate (impact – centered; the ratio of the thickness of the plate to the wavelength of exposure – one to two). The studied computational domain has 22011 nodal points. Solves the system of equations from 88044 unknown.

**Keywords:** mathematical modeling, numerical method, algorithm, software complex, the algorithm Musayev V.K., elastic waves, transient wave equation, dynamics of continuum, method of Galerkin, wave propagation, bearing structure, technical system, infinite plate, a concentrated impact, impact impact, the studied computational domain

Для решения двумерной нестационарной динамической задачи математической теории упругости с начальными и граничными условиями используем метод конечных элементов в перемещениях.

Некоторая информация о моделировании нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью рассматриваемого численного метода приведена в следующих работах [1–10].

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела Г, записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\bar{H}\ddot{\bar{\Phi}} + \bar{K}\bar{\Phi} = \bar{R}, \quad \bar{\Phi}|_{t=0} = \bar{\Phi}_0,$$

$$\dot{\bar{\Phi}}|_{t=0} = \dot{\bar{\Phi}}_0, \quad (1)$$

где  $\bar{H}$  – диагональная матрица инерции;  $\bar{K}$  – матрица жесткости;  $\bar{\Phi}$  – вектор узловых упругих перемещений;  $\dot{\bar{\Phi}}$  – вектор узловых упругих скоростей перемещений;  $\ddot{\bar{\Phi}}$  – вектор узловых упругих ускорений;  $\bar{R}$  – вектор внешних узловых упругих сил.

Интегрируя уравнения (1) конечноэлементным вариантом метода Галеркина, получим явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\bar{\Phi}_{i+1} = \bar{\Phi}_i + \Delta t \bar{H}^{-1} (-\bar{K}\bar{\Phi}_i + \bar{R}_i),$$

$$\dot{\bar{\Phi}}_{i+1} = \dot{\bar{\Phi}}_i + \Delta t \ddot{\bar{\Phi}}_{i+1}. \quad (2)$$

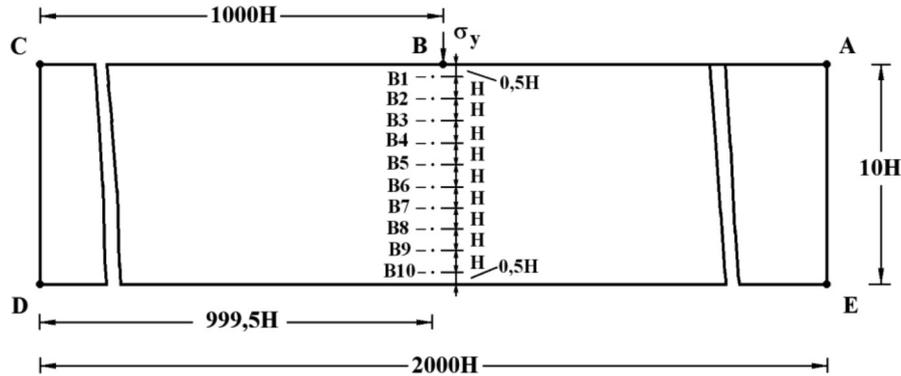


Рис. 1. Постановка задачи о распространении нестационарных упругих волн в пластинке (воздействие – сосредоточенное; соотношение толщины пластинки к длине волны воздействия – один к двум)

Шаг по временной переменной координате  $\Delta t$  выбирается из следующего соотношения

$$\Delta t = 0,5 \frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i=1, 2, 3, \dots), \quad (3)$$

где  $\Delta l$  – длина стороны конечного элемента.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработана методика, разработан алгоритм и составлен комплекс программ для решения двумерных линейных и нелинейных задач при различных начальных и граничных условиях, для областей сложной формы. Комплексы программ написаны на алгоритмическом языке Фортран-90.

В работах [2–5, 7, 9–10] приведена информация о физической достоверности и математической точности применяемого численного метода, алгоритма и комплекса программ.

Рассмотрим задачу о вертикальном сосредоточенном упругом ударном воздействии (рис. 2) на пластинку (соотношение толщины пластинки к длине волны воздействия – один к двум) (рис. 1).

Расчеты проводились при следующих единицах измерения: килограмм-сила (кгс); сантиметр (см); секунда (с). Для перехода в другие единицы измерения были приняты следующие допущения:  $1 \text{ кгс/см}^2 \approx 0,098 \text{ МПа}$ ;  $1 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2/\text{см}^4 \approx 0,98 \times 10^9 \text{ кг/м}^3$ .

В точке В приложено нормальное воздействие  $\sigma_y$ , которое при  $0 \leq n \leq 10$  ( $n = t / \Delta t$ ) изменяется линейно от 0 до P, при  $11 \leq n \leq 30$  равно P и при  $31 \leq n \leq 40$  от P до 0 ( $P = \sigma_0$ ,  $\sigma_0 = -0,098 \text{ МПа}$  ( $-1 \text{ кгс/см}^2$ )). Принято следующее допущение:  $1 \text{ кгс/см}^2 \approx 0,098 \text{ МПа}$ .

Граничные условия для контуров CD и EA при  $t > 0$   $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$ . Отражен-

ные волны от контуров CD и EA не доходят до исследуемых точек при  $0 \leq n \leq 500$ . Контур CB, BA и DE свободны от нагрузок, кроме точки В, где приложено воздействие.

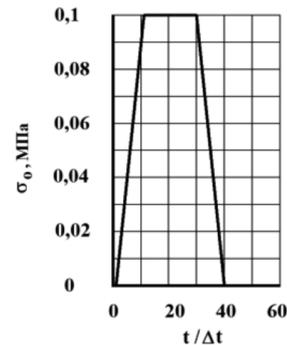


Рис. 2. Ударное воздействие в задаче о распространении нестационарных упругих волн в пластинке (воздействие – сосредоточенное; соотношение толщины пластинки к длине волны воздействия – один к двум)

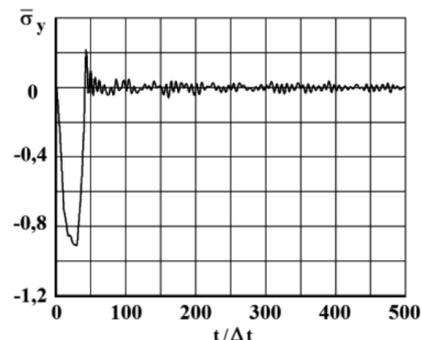


Рис. 3. Изменение упругого нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  во времени  $t/\Delta t$  в точке B1 (воздействие – сосредоточенное; соотношение толщины пластинки к длине волны воздействия – один к двум)

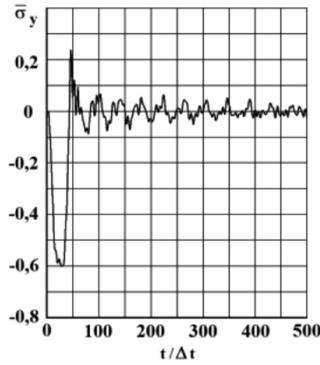


Рис. 4. Изменение упругого нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  во времени  $t/\Delta t$  в точке В2 (воздействие – сосредоточенное; соотношение толщины пластинки к длине волны воздействия – один к двум)

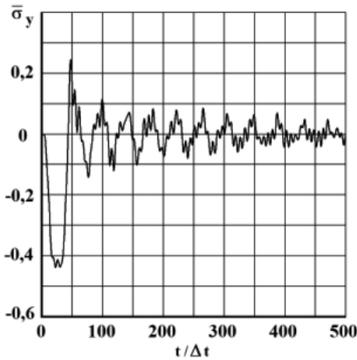


Рис. 5. Изменение упругого нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  во времени  $t/\Delta t$  в точке В3 (воздействие – сосредоточенное; соотношение толщины пластинки к длине волны воздействия – один к двум)

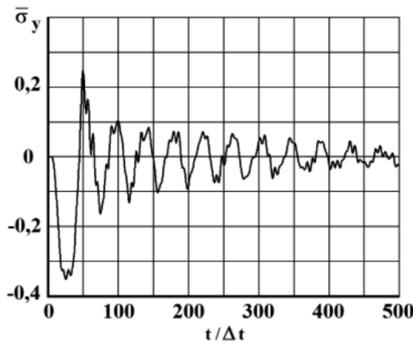


Рис. 6. Изменение упругого нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  во времени  $t/\Delta t$  в точке В4 (воздействие – сосредоточенное; соотношение толщины пластинки к длине волны воздействия – один к двум)

Расчеты проведены при следующих исходных данных:  $H = \Delta x = \Delta y$ ;  $\Delta t = 9,263 \times 10^{-7}$  с;  $E = 6,958 \times 10^4$  МПа ( $7,1 \times 10^5$  кгс/см<sup>2</sup>);  $\nu = 0,34$ ;  $\rho = 2,7 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup> ( $2,755 \times 10^6$  кгс/см<sup>4</sup>);

$C_p = 5398$  м/с;  $C_s = 3078$  м/с. Приняты следующие допущения:  $1 \text{ кгс/см}^2 \approx 0,098 \text{ МПа}$ ;  $1 \text{ кгс с}^2/\text{см}^4 \approx 0,98 \times 10^9 \text{ кг/м}^3$ .

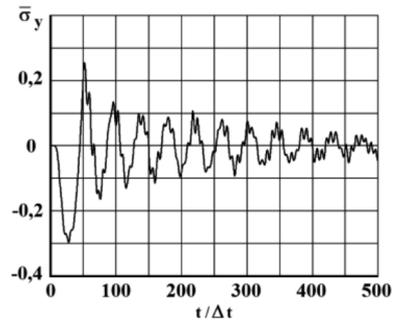


Рис. 7. Изменение упругого нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  во времени  $t/\Delta t$  в точке В5 (воздействие – сосредоточенное; соотношение толщины пластинки к длине волны воздействия – один к двум)

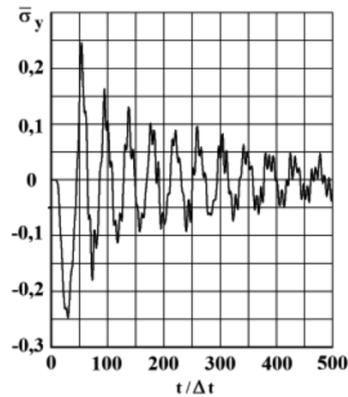


Рис. 8. Изменение упругого нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  во времени  $t/\Delta t$  в точке В6 (воздействие – сосредоточенное; соотношение толщины пластинки к длине волны воздействия – один к двум)

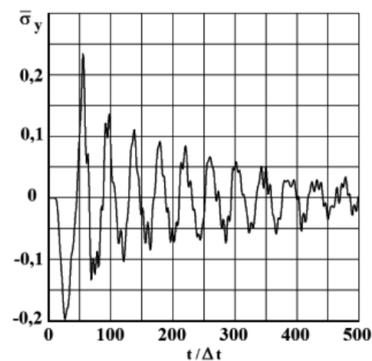


Рис. 9. Изменение упругого нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  во времени  $t/\Delta t$  в точке В7 (воздействие – сосредоточенное; соотношение толщины пластинки к длине волны воздействия – один к двум)

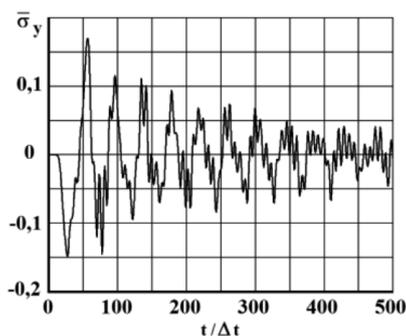


Рис. 10. Изменение упругого нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  во времени  $t/\Delta t$  в точке B8 (воздействие – сосредоточенное; соотношение толщины пластинки к длине волны воздействия – один к двум)

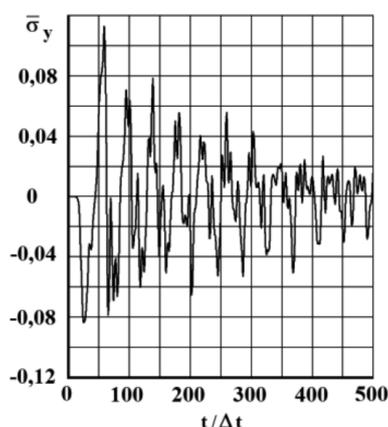


Рис. 11. Изменение упругого нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  во времени  $t/\Delta t$  в точке B9 (воздействие – сосредоточенное; соотношение толщины пластинки к длине волны воздействия – один к двум)

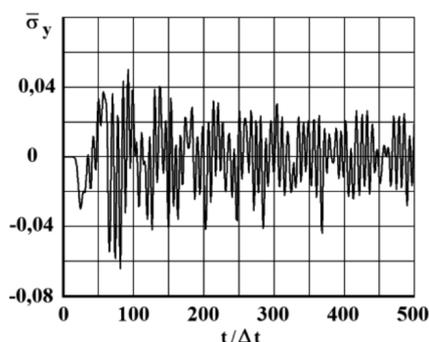


Рис. 12. Изменение упругого нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  во времени  $t/\Delta t$  в точке B10 (воздействие – сосредоточенное; соотношение толщины пластинки к длине волны воздействия – один к двум)

Исследуемая расчетная область имеет 22011 узловых точек. Решается система уравнений из 88044 неизвестных.

На рис. 3–12 представлено изменение упругого нормального напряжения  $\bar{\sigma}_y$  ( $\bar{\sigma}_y = \sigma_y / |\sigma_0|$ ) во времени  $t$  в точках B1–B10 пластинки (рис. 1).

### Выводы

1. Для прогноза безопасности несущих конструкций технических систем при упругом нестационарном ударном воздействии применяется численное моделирование. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны методика, алгоритм и комплекс программ для решения линейных двумерных плоских задач, которые позволяют решать сложные задачи при воздействии упругой ударной волны на несущую конструкцию технических систем. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений. Задачи решаются методом сквозного счета, без выделения разрывов.

2. Исследуемая область по пространственным переменным разбивается на треугольные конечные элементы с тремя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений и на прямоугольные конечные элементы с четырьмя узловыми точками с билинейной аппроксимацией упругих перемещений. По временной переменной исследуемая область разбивается на линейные конечные элементы с двумя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений. За основные неизвестные в узле конечного элемента приняты два перемещения и две скорости перемещений.

3. Линейная динамическая задача с начальными и граничными условиями с помощью метода конечных элементов в перемещениях приведена к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями. Задача с начальными условиями с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина приведена к явной двухслойной схеме.

4. Решена задача о распространении нестационарных упругих волн в пластинке (воздействие – сосредоточенное; соотношение толщины пластинки к длине волны воздействия – один к двум). Исследуемая расчетная область имеет 22011 узловых точек. Решается система уравнений из 88044 неизвестных. Растягивающее упругое нормальное напряжение  $\bar{\sigma}_y$  имеет следующее максимальное значение  $\bar{\sigma}_y = 0,255$ . Сжимающее упругое нормальное напряжение  $\bar{\sigma}_y$  имеет следующее максимальное значение  $\bar{\sigma}_y = -0,912$ .

5. Полученные результаты можно оценить как первое приближение к решению сложной комплексной задачи о нестационарном упругом ударном воздействии на несущую конструкцию технических систем, с помощью численного моделирования волновых уравнений теории упругости.

**Список литературы**

1. Мусаев В.К. Численное моделирование задачи о воздействии сосредоточенной взрывной волны на свободной поверхности упругой полуплоскости // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 1. – С. 38–44.

2. Мусаев В.К. Об оценке достоверности и точности численного решения нестационарных динамических задач // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 3. – С. 48–60.

3. Мусаев В.К. Метод конечных элементов в задаче об отражении плоских продольных волн напряжений в виде дельта функции от свободной поверхности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2008. – № 1. – С. 43–51.

4. Мусаев В.К. Численное, аналитическое и экспериментальное решение задачи о концентрации нестационарных динамических напряжений в свободном круглом отверстии // Вестник Российского университета дружбы

народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2008. – № 4. – С. 67–71.

5. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11. – С. 10–14.

6. Мусаев В.К. Математическое моделирование поверхностных волн напряжений в задаче Лэмба при воздействии в виде дельта функции // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 2 (часть 1). – С. 25–29.

7. Мусаев В.К. Оценка точности и достоверности численного моделирования при решении задач об отражении и интерференции нестационарных упругих волн напряжений // Успехи современного естествознания. – 2015. – № 1 (часть 7). – С. 1184–1187.

8. Мусаев В.К. Математическое моделирование поверхностных волн напряжений в задаче Лэмба при воздействии в виде функции Хевисайда // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 5 (часть 1). – С. 38–41.

9. Мусаев В.К. Исследования устойчивости явной двухслойной линейной конечноэлементной схемы для внутренних узловых точек на равномерной прямоугольной сетке // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 5. – С. 39–42.

10. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных стоячих упругих волн в бесконечной полосе при воздействии в виде треугольного импульса // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 11 (часть 2). – С. 248–251.