УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРУГИХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В ЗАЩИТНОМ СООРУЖЕНИИ С ОСНОВАНИЕМ (ПОЛУПЛОСКОСТЬ) ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ ЛАВИНЫ

Мусаев В.К.

Московский государственный машиностроительный университет (МГМУ), Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Для решения двумерной нестационарной динамической задачи математической теории упругости с начальными и граничными условиями используем метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Применяется однородный алгоритм. С помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями привели к линейной задаче Коши. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработана методика, разработан алгоритм и составлен комплекс программ для решения двумерных линейных и нелинейных задач при различных начальных и граничных условиях, для областей сложной формы. Комплексы программ написаны на алгоритмическом языке Фортран-90. Рассмотрена задача о воздействии упругой ударной волны от лавины на защитное сооружение без полости. С помощью численного моделирования получены контурные напряжения в характерных областях исследуемой задачи.

Ключевые слова: моделирование, динамическая теория упругости, задача с начальными условиями, задача Коши, явная двухслойная схема, численный метод, алгоритм, комплекс программ, метод Мусаева В.К., нестационарные упругие волны, ударное воздействие, защитное сооружение, упругая полуплоскость, неотражающие граничные условия, лавина, безопасность, контурное напряжение, волновая теория ударной безопасности

MODELING OF NON-STATIONARY ELASTIC WAVES OF STRESSES IN THE PROTECTIVE STRUCTURE WITH A BASE (HALF-PLANE) UNDER THE INFLUENCE OF A SHOCK WAVE FROM AN AVALANCHE

Musayev V.K.

Moscow state University of mechanical engineering (MSMU), Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

For solving two-dimensional nonstationary dynamic problems of mathematical elasticity theory with initial and boundary conditions using the finite element method in displacements. The problem is solved by the method of end-to-end account, without allocation of breaks. Applies a uniform algorithm. Using the method of finite elements in displacements, a linear problem with initial and boundary conditions led to a linear Cauchy problem. On the basis of the finite element method in displacements the developed methodology, designed the algorithm and drafted a set of programs for solving linear and nonlinear two-dimensional problems with various initial and boundary conditions, for areas of complex shape. Complexes of programs written in algorithmic language Fortran-90. The problem of elastic impact of a shock wave from an avalanche on a protective structure without a cavity. With the help of numerical simulation obtained the grid voltages in the characteristic areas of the investigated problem.

Keywords: modeling, dynamic theory of elasticity, the problem with the initial conditions, the Cauchy problem, explicit two-layer scheme, numerical method, algorithm, software complex, the method Musayev V.K., unsteady elastic waves, shock, protective structure, elastic half-plane, non-reflecting boundary conditions, avalanche, security, contour voltage, the wave theory of impact security

Для решения задачи о моделировании упругих нестационарных волн напряжений в деформируемых областях сложной формы рассмотрим некоторое тело Г в прямоугольной декартовой системе координат XOY, которому в начальный момент времени t = 0 сообщается механическое нестационарное импульсное воздействие.

Предположим, что тело Г изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях.

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial X}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial Y}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial X}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial Y}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$
$$(x,y)\in\Gamma,$$
$$\sigma_x=\rho C_p^2\varepsilon_x+\rho(C_p^2-2C_s^2)\varepsilon_y,$$
$$\sigma_y=\rho C_p^2\varepsilon_y+\rho(C_p^2-2C_s^2)\varepsilon_x,\ \tau_{xy}=\rho C_s^2\gamma_{xy},$$
$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial X},\ \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial Y},\ \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial Y}+\frac{\partial v}{\partial X},$$
$$(x,y)\in(\Gamma\cup S) \qquad (1)$$

где σ_x, σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора упругих напряжений; ε_x, ε_y и γ_{xy} – ком-

поненты тензора упругих деформаций; u и v – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей OX и OY соответственно; ρ – плотность материала; $C_p = \sqrt{\dfrac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ – скорость продольной упругой волны; $C_s = \sqrt{\dfrac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ – скорость поперечной упругой волны; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; $S\ (S_1 \cup S_2)$ – граничный контур тела Г.

Систему (1) в области, занимаемой телом Г, следует интегрировать при начальных и граничных условиях.

Для решения двумерной нестационарной динамической задачи математической теории упругости с начальными и граничными условиями (1) используем метод конечных элементов в перемещениях.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела Г, записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\bar{H}\ddot{\vec{\Phi}} + \bar{K}\vec{\Phi} = \vec{R}\,,\ \vec{\Phi}\big|_{t=0} = \vec{\Phi}_0\,,\ \dot{\vec{\Phi}}\big|_{t=0} = \dot{\vec{\Phi}}_0\,, \quad (2)$$

где $\bar{H}$ – диагональная матрица инерции; $\bar{K}$ – матрица жесткости; $\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; $\vec{R}$ – вектор внешних узловых упругих сил.

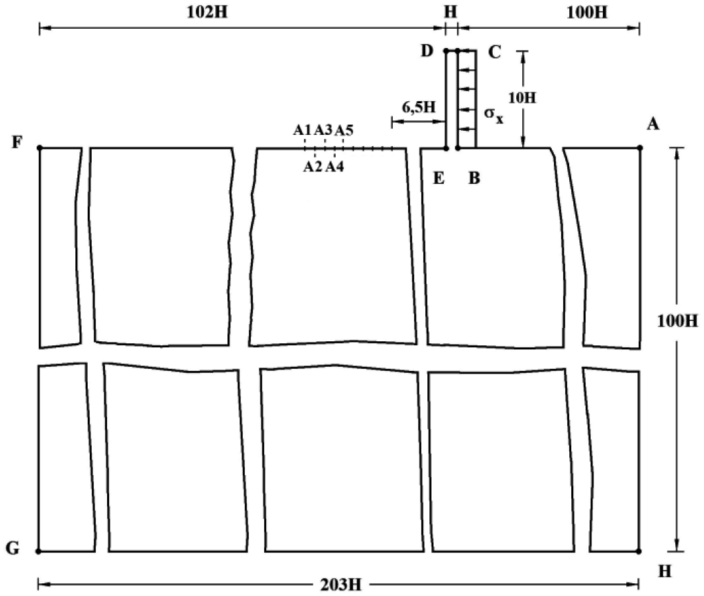

Рис. 1. Постановка задачи о воздействии упругой нестационарной ударной волны от лавины на защитное сооружение

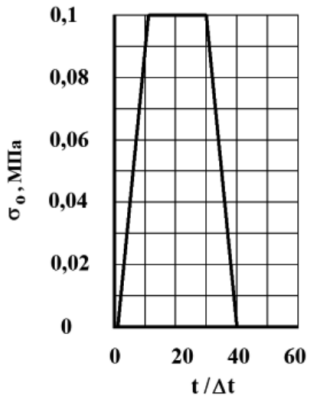

Рис. 2. Ударное воздействие в виде трапеции

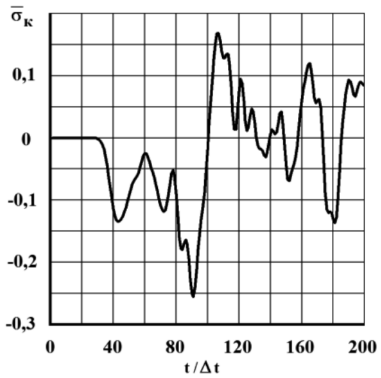

Рис. 3. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени t/Δt в точке A1

Интегрируя уравнения (2) конечноэлементным вариантом метода Галеркина, получим явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\dot{\vec{\Phi}}_{i+1} = \dot{\vec{\Phi}}_i + \Delta t \bar{H}^{-1}(-\bar{K}\vec{\Phi}_i + \vec{R}_i),$$

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t \dot{\vec{\Phi}}_{i+1}. \qquad (3)$$

Шаг по временной переменной координате Δt выбирается из следующего соотношения

$$\Delta t = 0,5\frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ ...), \qquad (4)$$

где Δl – длина стороны конечного элемента.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработана методика, разработан алгоритм и составлен комплекс программ для решения двумерных линейных и нелинейных задач при различных начальных и граничных условиях, для областей сложной формы. Комплексы программ написаны на алгоритмическом языке Фортран-90.

В работах [4–9] приведена информация о верификации численного моделирования нестационарных волн напряжений в областях различной формы с помощью разработанного метода, алгоритма и комплекса программ.

Рассмотрим задачу о воздействии упругой ударной волны от лавины (рис. 2) на защитное сооружение без полости (рис. 1).

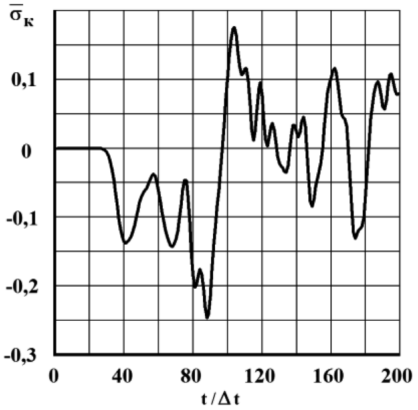

Рис. 4. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени t/Δt в точке A2

В работах [1–10] приведена информация о применении рассматриваемого метода, алгоритма и комплекса программ для численного моделирования волн напряжений в областях сложной формы.

Расчеты проводились при следующих единицах измерения: килограмм-сила (кгс); сантиметр (см); секунда (с). Для перехода в другие единицы измерения были приняты следующие допущения: 1 кгс/см^2 ≈ 0,1 МПа; 1 кгс с^2/см^4 ≈ 10^9 кг/м^3.

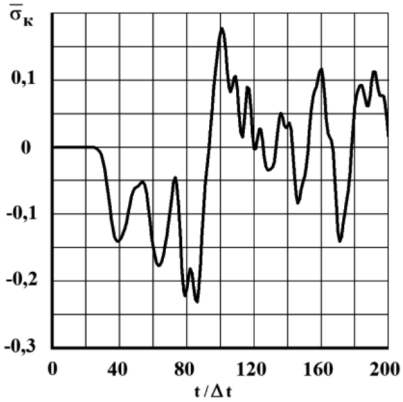

Рис. 5. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени t/Δt в точке A3

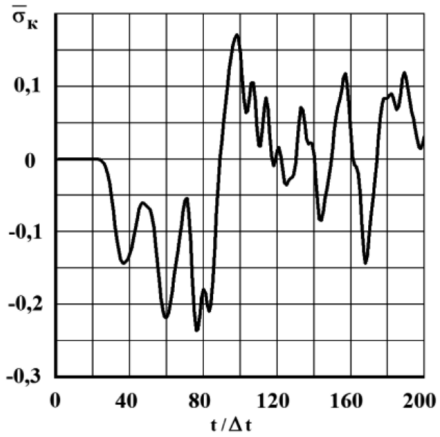

Рис. 6. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени t/Δt в точке A4

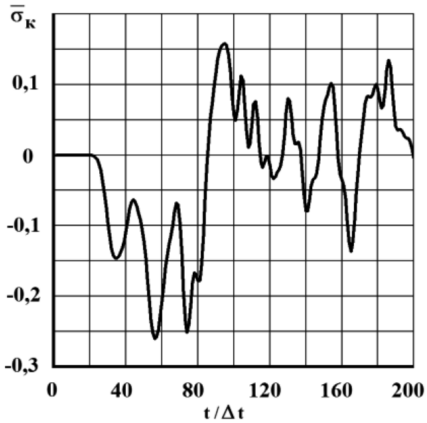

Рис. 7. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ во времени t/Δt в точке A5

На контуре CB приложено нормальное воздействие σ_x (рис. 1), которое при $0 \le n \le 10$ ($n = t/\Delta t$) изменяется линейно от 0 до P, при $11 \le n \le 30$ равно P и при

$31 \le n \le 40$ от P до 0 ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = -0{,}1$ МПа (-1 кгс/см^2)). Граничные условия для контура FGHA при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$.

Отраженные волны от контура FGHA не доходят до исследуемых точек при $0 \le n \le 200$. Контуры DEF и BA свободны от нагрузок, кроме точки B, где приложено воздействие.

Расчеты проведены при следующих исходных данных: $H = \Delta x = \Delta y$; $\Delta t = 1{,}393\times10^{-6}$ с; $E = 3{,}15\times10^4$ МПа ($3{,}15\times10^5$ кгс/см^2); $\nu = 0{,}2$; $\rho = 0{,}255\times10^4$ кг/м^3 ($0{,}255\times10^{-5}$ кгс с^2/см^4); $C_p = 3587$ м/с; $C_s = 2269$ м/с. Исследуемая расчетная область имеет 21624 узловых точек. Решается система уравнений из 86496 неизвестных.

На рис. 3–7 показано изменение упругого контурного напряжения $\overline{\sigma}_k$ ($\overline{\sigma}_k = \sigma_k / |\sigma_0|$) во времени n в точках A1–A5 (рис. 1), находящихся на свободной поверхности упругой полуплоскости (расстояние между точками: A1 и A2 равно H; A2 и A3 равно H; A3 и A4 равно H; A4 и A5 равно H).

Выводы

1. Для прогноза безопасности защитных сооружений от ударной волны лавины применяется численное моделирование. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны методика, алгоритм и комплекс программ для решения линейных двумерных плоских задач, которые позволяют решать сложные задачи при ударных воздействиях на сооружения.

2. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений. Матрица упругости выражена через скорость продольных волн, скорость поперечных волн и плотность.

3. Исследуемая область разбивается по пространственным переменным на треугольные конечные элементы с тремя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений и на прямоугольные конечные элементы с четырьмя узловыми точками с билинейной аппроксимацией упругих перемещений. По временной переменной исследуемая область разбивается на линейные конечные элементы с двумя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений. За основные неизвестные приняты два перемещения и две скорости перемещений в узле конечного элемента.

4. Задачи решаются методом сквозного счета, без выделения разрывов. Применяется кусочно-линейная аппроксимация для уменьшения влияния разрывов на точность результатов численного решения, полученных с помощью метода конечных элементов в перемещениях.

5. Линейная динамическая задача с начальными и граничными условиями в виде дифференциальных уравнений в частных производных, для решения задач о нестационарных ударных воздействиях от лавины, с помощью метода конечных элементов в перемещениях приведена к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями, которая решается по явной двухслойной схеме.

6. Решена задача о воздействии упругой ударной волны от лавины на защитное сооружение без полости. Ударное воздействие моделируется в виде трапеции. Исследуемая расчетная область имеет 21624 узловых точек. Решается система уравнений из 86496 неизвестных. Получены напряжения в точках на поверхности упругой полуплоскости около защитного сооружения без полости. Растягивающее упругое контурное напряжение $\overline{\sigma}_k$ имеет следующее максимальное значение $\overline{\sigma}_k = 0{,}196$. Сжимающее упругое контурное напряжение $\overline{\sigma}_k$ имеет следующее максимальное значение $\overline{\sigma}_k = -0{,}442$.

7. Полученные результаты можно оценить как первое приближение к решению сложной комплексной задачи при воздействии упругой ударной волны от лавины на защитное сооружение с основанием в виде полуплоскости.

Список литературы

1. Мусаев В.К. Численное решение некоторых задач безопасности жизнедеятельности с помощью метода конечных элементов // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2005. – № 1. – С. 17–23.

2. Мусаев В.К. Определение качества сооружений в детерминированной постановке с помощью математического мониторинга // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2005. – № 1. – С. 42–47.

3. Мусаев В.К. О некоторых возможностях математического моделирования и численного компьютерного эксперимента // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2006. – № 1. – С. 81–86.

4. Мусаев В.К. О достоверности результатов математического моделирования нестационарных волн напряжений в объектах сложной формы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 3. – С. 71–76.

5. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11. – С. 10–14.

6. Мусаев В.К. Оценка точности и достоверности численного моделирования при решении задач об отражении и интерференции нестационарных упругих волн напряжений // Успехи современного естествознания. – 2015. – № 1 (часть 7). – С. 1184–1187.

7. Мусаев В.К. Решение задачи о распространении плоских продольных волн в виде импульсного воздействия // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 4 (часть 2). – С. 326–330.

8. Мусаев В.К. Исследования устойчивости явной двухслойной линейной конечноэлементной схемы для внутренних узловых точек на равномерной прямоугольной сетке // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – № 5. – С. 39–42.

9. Мусаев В.К. Численное моделирование плоских продольных волн в виде импульсного воздействия (восходящая часть – четверть круга, средняя – горизонтальная, нисходящая – линейная) в упругой полуплоскости // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 11 (часть 2). – С. 222–226.

10. Мусаев В.К. Численное моделирование нестационарных упругих волн напряжений в некоторых задачах методического характера // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 11 (часть 2). – С. 227–230.