

УДК 551.509.329

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА ПРИМЕСИ АТМОСФЕРНОГО ВОЗДУХА

Абдула Ж., Алтеев Т., Галагузова Т.А., Алдаберген Ш.

*Таразский инновационно-гуманитарный университет, Тараз, e-mail: tamara5024@mail.ru*

В работе показана численная модель уравнения, описывающая загрязнение атмосферы производственными отходами. Основные преимущества аналитической модели заключаются в её простой численной реализации, в скорости счёта. С помощью аналитического решения можно получить фрагментарное распределение загрязняющих веществ в любой заданной области, не решая краевой задачи. Из приведённых расчётов видно, что аналитическая модель хорошо описывает процесс распространения выбросов в атмосфере при постоянных коэффициентах переноса и может быть использована в качестве теста для проверки численных расчетов и для оперативного получения предварительной информации о распространении примеси. Перспективно использование таких систем в следующих целях: контроль источников загрязнения – быстрое измерение выбросов загрязнения; измерение переноса загрязнения – контроль в приземном слое и на высоте над обширными географическими районами.

**Ключи:** загрязнение атмосферы, численная модель, загрязнение производственными отходами, примеси атмосферного воздуха

## ANALYTICAL MODEL OF THE CARRYING ADMIXTURE ATMOSPHERIC AIR

Abdula J., Alteev T., Galaguzova T.A., Aldabergen S.

*Taraz Innovation and Humanitarian University, Taraz, e-mail: tamara5024@mail.ru*

In work is shown numerical model of the equation, describing contamination of atmosphere production departure. The Main advantage analytical to models are concluded in her(its) simple numerical realization, in speed of the count. By means of analytical decision possible to get fragmentary distribution polluting material in any given area, not solving marginal problem. From brought calculation is seen that analytical model well describes the process of the spreading surge in atmosphere under constant factor of the carrying and can be used as test for checking numerical calculation and for operative reception of preliminary information on spreading admixture. Perspective use of such systems in the following purpose: checking the sources of the contamination – a quick measurement surge contamination; the measurement of the carrying the contamination – a checking in приземном layer and on height on extensive geographical region.

**Keywords:** contamination of atmosphere, numerical model, contamination production departure, admixture of the atmospheric air

В настоящей работе рассмотрим вопросы численного моделирования уравнения переноса-диффузии на примере расчетов, выполненных для оценки загрязнения приземного слоя атмосферы промышленными выбросами.

Предлагаем на численную реализацию модели переноса-диффузии примеси наложить следующие ограничения. Программная реализация модели предназначена для природоохранных служб заводов и должна работать на машинах класса PC AT 486. Отсюда следует, что модель предназначена для моделирования приземного слоя атмосферы в окрестности (ограниченной радиусом 10-20 км) промышленных предприятий. А отсюда следует, что в расчетной модели течений скорости может быть либо вообще будут постоянны в расчетной области. Упрощающее предположение о постоянстве скорости в расчетной области может быть оправдано ее относительно небольшими пространственными масштабами и тем, что заводы стремятся строить на относительно ровных, хорошо «продуваемых» ветрами площадках. Химическую транс-

формацию примесей можно не учитывать и нестационарные процессы не рассматривать, сделать это не позволят уже упоминавшиеся вычислительные ресурсы.

Пусть источники выбросов находятся внутри цилиндра, нижняя грань которого – подстилающая поверхность (земля).

В своей основе все математические модели процесса распространения той или иной примеси опираются на полуэмпирическое дифференциальное уравнение переноса:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} + \sigma \phi = \frac{\partial}{\partial z} \left( \gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \mu \Delta \phi + f \quad (1)$$

Здесь  $\phi$  – искомая концентрация примеси;  $t$  – время;  $u, v, w$  – компоненты скорости ветра по осям  $x, y, z$  декартовой системы координат соответственно;  $\mu$  – коэффициент турбулентной диффузии в плоскости  $(x, y)$ ;  $\gamma$  – коэффициент турбулентной диффузии в  $z$ -направлении ( $z$ -высота);

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2};$$

$f$  – источниковый член, зависящий в общем случае от координат и времени, то есть  $f = f(y, z, t)$ ;

$\sigma$  – величина, связанная с трансформацией (поглощением) субстанции (в общем случае  $\sigma = \sigma(x, y, z, t)$ ).

Обычно требуется еще условие соленоидальности поля скоростей, то есть компоненты скорости в каждой точке области в любой момент времени должны удовлетворять уравнению неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Наиболее распространенными граничными условиями для уравнения (1) являются следующие:

$\phi = \phi_p$  – на боковой поверхности цилиндра, представляющего расчетную область (условие означает, что граница удалена от источника настолько далеко, что концентрация выбрасываемого источником поллютанта, загрязняющей атмосферу примеси, не вносит существенного вклада в фоновую концентрацию);

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \alpha\phi \quad \text{– в нижнем основании цилиндра}$$

( $z = 0$ ) (условие «прилипания» примеси; трава, деревья, городская застройка удерживают примесь (дым, газ) в своих «порах» и они сами могут служить источником загрязнения атмосферы);

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad \text{– в верхнем основании цилиндра}$$

( $z = H$ ) (на верхней границе происходит поглощение, уничтожение поллютанта или самоочищение атмосферы), где  $\phi_p$  – фоновая концентрация примеси;  $\alpha$  – коэффициент, учитывающий «прилипания» примеси к поверхности Земли.

В общем случае то или иное решение уравнения (1) (по сути – распределение концентраций примеси в любой момент времени) приходится находить путем численного интегрирования последнего. Однако в ряде случаев, наложив определенные ограничения на процесс распространения примеси, можно получать те или иные аналитические (формульные) решения.

В случае, когда для описания процесса распространения примеси используется двумерное уравнение

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + u\frac{\partial\phi}{\partial x} + v\frac{\partial\phi}{\partial y} + \sigma\phi = \mu\Delta\phi + f \quad (2)$$

то, несмотря на его внешнее сходство с (1), под концентрацией  $v$  следует понимать интегральную по высоте концентрацию примеси. Ее размерность –  $\left[ \frac{\text{ед. массы}}{(\text{ед. длины})^2} \right]$ , а не

традиционная  $\left[ \frac{\text{ед. массы}}{(\text{ед. длины})^3} \right]$ , поэтому значение концентрации  $v$ , полученное по двумерной методике, должно быть «размыто» по высоте слоя  $H$ , внутри которого реально и происходит процесс распространения. Проще всего сделать, разделив  $v$  на  $H$ , тем самым предположив распределение равномерным.

Следует заметить, что уравнение (1) описывает процесс распространения субстанции  $v$  в среде, свойства ( $u, v, w, \sigma, \gamma, \mu, f$ ) которой не зависят от данного процесса, то есть обратное влияние примеси на характеристики среды не учитывается. Это вполне соответствует физике упомянутого процесса, поскольку объемные (массовые) концентрации примеси в среднем незначительны. В случае распространения тяжелой примеси вместо  $z$  – компоненты скорости  $w$  в уравнении (1) должна стоять скорость ( $w - w_g$ ), где  $w_g$  – скорость оседания частиц под действием силы тяжести.

**Аналитическая модель.** Рассмотрим стационарную задачу (3), когда скорости ветра  $u = const$  и  $v = const$ . Тогда решение уравнения переноса для точечного источника ВСВ:

$$u\frac{\partial\Phi}{\partial x} + v\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \sigma\Phi - \mu\Delta\Phi = Q\delta(r - r_0) \quad (3)$$

будем искать в виде:

$$\Phi = \phi \exp \left[ \frac{u(r - r_0)}{2\mu} \right] \quad (4)$$

где  $u(r - r_0) = u(x - x_0) + v(y - y_0)$ , и подставляя (4) в уравнение (3) приходим к уравнению относительно  $\phi$ :

$$-\mu\Delta\phi + \beta\phi = Q\delta(r - r_0), \quad (5)$$

где  $\beta = \sigma + \frac{(u^2 + v^2)}{4\mu}$ ;  $\delta(r - r_0)$  – дельта-функция: 1, если  $r = r_0$ ;  $\delta(r - r_0) = \{ 0, \text{ если } r \neq r_0$

Тогда решение уравнения (5) в плоскости  $(x, y)$  дается формулой

$$\phi = \frac{Q}{2\pi\mu} K_0 \left( \sqrt{\frac{\beta}{\mu}} |r - r_0| \right), \quad (6)$$

где  $K_0$  – функция Макдональда, имеющая вид:

$$K_0(x) = \int_0^\infty \exp[-xch(y)] dy, \quad x > 0. \quad (7)$$

С учетом (6) получаем решение уравнения (3) [1]:

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi\mu} \exp\left[\frac{u \cdot |r - r_0|}{2\mu}\right] K_0\left(\sqrt{\frac{\beta}{\mu}} |r - r_0|\right) \quad (8)$$

Оценим характерные размеры области Q, при которых формула (8) дает приближенное решение задачи, где на границе области E концентрация примесей должна быть нулевой. Введем малую величину E такую, что при  $\Phi \leq E$  выполняется краевое условие на границе области. Выбор E

обуславливается фоновой концентрацией, а также тем минимальным уровнем, при котором влиянием данного типа примесей можно пренебречь [1].

Полагая априори величины  $|r - r_0|$  такими, что справедлива асимптотическая формула

$$K_0 \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \exp(-x) \quad (9)$$

и используя неравенство  $(u \cdot r_0) \leq |u| \cdot |r - r_0|$ , находим

$$\Phi \leq \frac{Q}{2\pi\mu} \exp\left[\frac{|\bar{u}| \cdot |\bar{r} - \bar{r}_0|}{\mu}\right] - \exp\left[\frac{|u| \cdot |r - r_0|}{2\mu}\right] \sqrt{\frac{2\pi\mu}{|r - r_0|(4\sigma\mu + u^2 + v^2)}}$$

откуда приходим к соотношению:

$$|r - r_0| \approx \frac{Q^2}{E^2} \frac{1}{2\pi\mu(4\sigma\mu + u^2 + v^2)},$$

выполнение которого при выборе области определения решения G, гарантирует решение краевой задачи с заданной степенью точности E.

Основные трудности, связанные с получением аналитического решения для задачи (3), обусловлены вычислением функции Макдональда (7). Вычисление интеграла (7) на полубесконечной области представляет собой трудную задачу. Поэтому будем аппроксимировать функцию Макдональда полиномом, степень которого возьмем из

условия точности аппроксимации. Для точности аппроксимации порядка  $10^{-6}$  выбрали полином 12 степени. Такая высокая точность аппроксимации необходима для тестирования численных решений. Для описания реальных ситуаций такая точность не требуется, поскольку данная модель для этого малоприменима.

При малых значениях аргумента x использовалось асимптотическое представление. Тогда решение задачи (3) можно представить в следующем виде:

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi\mu} \exp\left[\frac{|\bar{u}| \cdot |\bar{r} - \bar{r}_0|}{2\mu}\right] \tilde{k}_1(x), \text{ при } x < 2 \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1(x) = & -\alpha \ln(\tilde{x}_1) - 0.57721566 + 0.4227842\tilde{x}_1^2 + 0.23069756\tilde{x}_1^4 + \\ & 0.0348859\tilde{x}_1^6 + 0.00262698\tilde{x}_1^8 + 0.0001075\tilde{x}_1^{10} + 0.000074\tilde{x}_1^{12}. \end{aligned}$$

Здесь  $\tilde{x}_1 = x/2$ , где  $x = \sqrt{\frac{\beta}{\mu}} |r - r_0|$ ;

$$\alpha = 1 + 3.5156229t^2 + 3.0899424t^4 + 1.2067492t^6 + 0.2659732t^8 + 0.0360768t^{10} + 0.0045813t^{12},$$

где  $t = x/3.75$

$$\Phi = -\frac{Q}{2\pi\mu} \exp\left[\frac{|\bar{u}| \cdot |r - r_0|}{2\mu} - x\right] \tilde{k}_2(x), \text{ при } x \geq 2. \quad (11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{k}_2(x) = & 1.25331414 - 0.07832358x_2 + 0.02189568\tilde{x}_2^2 - 0.01062446\tilde{x}_2^3 + \\ & 0.00587872\tilde{x}_2^4 - 0.0025154\tilde{x}_2^5 + 0.000532\tilde{x}_2^6, \end{aligned}$$

где  $\tilde{x}_2 = 2/x$ .

Точность выполнения разложения функции Макдональда проверялась на таблицах специальных функций [2] – совпадение до шестого знака после десятичной запятой. Решения (10, 11) использовались при тестировании численного метода решения двумерной задачи переноса (3), получено совпадение до шестого знака. Из проведенных сравнений следует, что решение задачи переноса (10, 11) для точечного источника единичной интенсивности ( $Q = 1$ ) с точностью до  $10^{-6}$  описывает процессы переноса поллютантов в атмосфере в рамках данной модели.

Основные недостатки аналитической модели связаны с постоянством коэффициентов переноса ( $\sigma$ ,  $\mu$ ) и скоростью ветра. При этом фоновая концентрация выброса должна быть нулевой. В противном случае необходимо задавать дополнительный эффективный источник, который мог бы обеспечить существующую фоновую концентрацию поллютантов.

Основные преимущества аналитической модели заключаются в ее простой численной реализации, в быстроте счета. С помощью аналитического решения можно получить фрагментарное распределение загрязняющих веществ в любой заданной области, не решая краевой задачи.

Область расчетов покроем сеткой таким образом, чтобы источники выбросов попадали в узлы сетки. Для аналитической модели это не существенно, но мы будем использовать и в численных методах ту же сетку, там это требование просто необходимо. На практике в сеточный узел помещают

эффективный источник, в котором учтены все источники, находящиеся в окрестности узла. Тогда каждый узел можно рассматривать как отдельный точечный источник с заданной интенсивностью и, используя решение (10, 11), можно получить распределение загрязняющих веществ от каждого источника независимо от других. Решение в произвольной точке расчетной области будет суммой вкладов в загрязнение от всех точечных источников. Пусть  $x_i, y_i$  – координаты расчетной области, в которой необходимо получить решение задачи, а  $x_L, y_M$  – координаты источников. Тогда

$$\Phi = \sum_{S=1}^N \Phi_S(x_i - x_L, y_i - y_M),$$

где  $N$  – число точечных источников, а функция

$$\Phi_S(x_i - x_L, y_i - y_M) = Q$$

при  $(x_i = x_L, y_i = y_M)$ .

Из приведенных расчетов видно, что аналитическая модель хорошо описывает процесс распространения выбросов в атмосфере при постоянных коэффициентах переноса и может быть использована в качестве теста для проверки численных расчетов и для оперативного получения предварительной информации о распространении примеси.

#### Список литературы

1. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1982. – 320 с.
2. Янке Е. Эмдэ Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1968. – 344 с.